BIBLIOTECA NAZ.
Vittorio Emanuele III
XXXIV
D
82
NAPOLI

Digitized by Google

MODO FACILE E CHIARO

PER COSTRUIRE

Tutte l' Equazioni indeterminate del secondo grado

DE' LUOGHI

ALLE SEZIONI CONICHE

A' GIOVANI STUDIOSI DELL' ANALISI

ESPOSTO

ED

ALL' ECCELLENZA DEL SIGNOR Kav.

LORENZO FRANCESCO II.

MOROSINI

PROCURATOR DI SAN MARCO

DEDICATO

DA MELCHIORE GRIFFI

LENDINARESE

Accademico in Rovigo di Architettura Militare.

REGIONALE VITTORIO EMANUELE III NAPOLI

B. R. NAPOLI

IN VERONA, MDCCLX.

PER DIONICIO RAMANZINI LIBRAJO A S. TOMIO,

CON LICENZA DE' SUPERIORI.

ECCELLENZA

A ragione, che m'induceſſe ſopra d'ogni altra a procurarmi l'invidiabile onore, che la preſente mia Operetta compariſſe alla luce fregiata de' glorioſi auſpicj di VOSTRA

ECCELLENZA, non ha meſtieri, che quì da me ſi manifeſti. Ognuno certamente che viva, non dirò tanto ſotto di queſto feliciſſimo Cielo Veneto, ma dovunque ei ſia, purchè capace d' intendere i chiari nomi di Virtù e di Gloria, ſaprà ridirmi, che per eſſere un ben giuſto diritto delle Scienze tutte di ricovrarſi ſotto il favore e la protezione de' Grandi, ho io così ſtudiato felicemente, ricorrendo all' E. V., di ſoſtenere collo ſplendido e ſaldo merito di un tale e tanto Mecenate la debolezza della mia Opera. Ora ſebbene di un così onorato giudizio, ch' Ella riſcuote meritamente da un Pubblico ammiratore dell' egregie e ſingolari ſue doti, aſſaiſſimo io mi compiaccia, e attribuiſcalo a mia gran ſorte, pur nonoſtante la ſupplico, a non iſdegnare di acconſentirmi graziosamente che io poſſa dirle altresì, non eſſere ſtato queſto l' unico ſcopo a che io miraſſi nell' intitolarle queſta mia tenue fatica. Egli è vero, che nell' ampio e prezioſo cumulo de' ſuoi pregi mirando, e queſti eſimj tutti ſcorgendoli e maravigliosi, aveva io onde atterrirmi dallo ſplendore della ſua Dignità, veggendola in Lei sì ben decorata e ſoſtenuta da tanti e sì preclari meriti ſuoi nell' Auguſta ſua Patria. Ma ſiccome per grandi e pellegrine che mi ſembraſſero coteſte ſue Qualità, come la vaſtità

e pe-

e penetrazion di ſua mente, la ſagace deſtrezza, la diligenza, la circoſpezione, il maturo conſiglio, la coſtanza, la fede, l'incorrotta giuſtizia, la decoroſa magnificenza e gravità, e le tant' altre che V. E. o derivò, o ſeppe sì vivamente ricopiare da' ſuoi grand' Avi; veggendo io però queſte ſue rare doti inteſe tutte a ſervire una trall' altre da V. E. più favorita e più diletta Virtù, alla quale io pure mi luſingava che non aveſſe a diſdirſi in tutto l'offerta di queſto qualunque ſia lavoro del mio ingegno, quindi fu, che io mi feci animoſo ad implorare preſſo la benigniſſima condiſcendenza dell' E. V., che queſta mia Operetta poteſſe aver la gloria di portare in fronte il ſuo chiariſſimo Nome. Queſta Virtù poi, che io già la veggo arbitra appieno e regolatrice del ſuo gran Cuore; Virtù benefica e generoſa tutta propria de' magnanimi Eroi, che quali Aſtri di primo lume non s' appagano punto di quella luce di che sfavillano a gran dovizia, ſe non in quanto la partecipano altrui, mi pare di averla già baſtantemente indicata, eſſere appunto il ſuo infatigabile zelo per il pubblico BENE; Virtù a cui V. E. deve la ſua gloria, e coteſta ſua ragguardevoliſſima Dignità; dalla quale tanto onore a Lei ne deriva, che l' ha sì ben meritata,

quan-

quanto ne riſcuote la ſovrana Mente della Sereniſſima ſua Patria, che gliel' ha conferita. A coteſta pertanto ſua premura della pubblica Felicità ho io quì inteſo di rendere quell' onore che maggiore per me ſi è potuto; e così di dare al mondo nel tempo ſteſſo, come ora faccio, un pubblico teſtimonio, e un perpetuo atteſtato verſo l'E. V. della mia riverente oſſervanza, e riſpettoſiſſima ſervitù. Nè io poſſo dubitare, Ecc:mo Sig:re, che queſta mia divota riconoſcenza non abbia ad eſſere dalla ſingolariſſima ſua Umanità, anzi che ſdegnata, benignamente gradita; non potendo Ella ignorare il ſommo vantaggio che ne ridonda alla Civil Società dalle Matematiche, maſſimamente poi ſe vengano queſte, come ho io inteſo in queſta parte di fare, propoſte in modo, che poſſa eziandio di per ſe ſteſſa imprenderne l'arduo ſtudio anche la non molto eſperta gioventù; la quale V. E. non ſolo ora ricerca per l'onorifico impiego di RIFORMATOR *che ſoſtiene, che non traſcuriſi, ma deſidera ancora in ogni tempo, che abbiaſene tutta la più ſollecita e pietoſa cura. E quì ſono certo che altri, che ricevuto aveſſe un tanto onore, quale V. E. per un tratto finiſſimo di ſua degnazione ſi è complacciuta di fare a me, volendoſene in qualche modo dimoſtrare riconoſcente e grato,*

en-

entrerebbe toſto ad annoverare i ſegnalati ſuoi meriti per le coſpicue Cariche in coteſta inclita Dominante, e per le rilevantiſſime e geloſe Deputazioni preſſo le più ſplendide e rinomate Corti di Europa, con tanto ſuo decoro, e sì gran vantaggio del pubblico Bene da V. E. ſoſtenute: ſono certo altresì, che, avendone sì ampia copia dalla Veneta Storia, non ſi rimarrebbe già di accennare almeno della nobiliſſima ſua Proſapia alcuno di que' grandi Eſemplari in ogni maniera di Civile e Criſtiana virtù celebratiſſimi; e quindi agevolmente paſſerebbe a lodare l' E. V., non già perch' Ella ſia da tali e così illuſtri Progenitori diſceſa; ma perchè co' nobili ſuoi ſudori gli ha eſpreſſi in Lei sì vivamente, intanto che ben diſtinguere non ſi poteſſe, ſe più Ella dalla gloria di Loro, oppure Eſſi da coteſta ſua propria vengano decorati. Io però che conoſco aſſai bene la virtuoſa indole dell' animo ſuo, tanto ſchivo di ſentire le proprie lodi, quanto vago di meritarle, le trapaſſo volentieri ſotto ſilenzio; che così moſtro di riſpettare, e di eſſer grato inſieme quanto più poſſo alla ſua modeſtia e moderazione; da cui pur riconoſco la ſperanza, che V. E., non iſdegnando ora queſto qualche ſia ſcarſo tributo della mia verace ſtima, non iſdegni altresì di pormi

ſot-

ſotto la ſua validiſſima protezione. Onde io quì ſenza più, implorandole da Dio primo fonte della vera felicità, lunghiſſima e proſperoſa vita a compimento de' magnanimi ſuoi deſiderj, dacchè indirizzati tutti ſono a conſervare, e vie maggiormente amplificare la gloria, e l'eterna fama di coteſta ſaggia e poſſente Repubblica, aſilo veramente e ſoſtegno della pubblica felicità, con oſſequioſiſſima venerazione inchinandola, mi pregio, e mi pregerò ſempre dell'onore di eſſere

Di Voſtra Eccellenza

Lendinara li 29. Febbrajo 1760.

Suo Obblig.mo Divot.mo Oſſeq.mo Servitor vero
Melchiore Griffi.

PRE-

PREFAZIONE.

NON fu mai data per avventura in luce Opera alcuna di Matematica, la quale più giuſtamente di queſta mia eſigeſſe dal proprio Autore la Prefazione. E a vero dire, avendo io quì intrapreſo in un Secolo sì ingombro e ſazio di tanti Libri, e sì vago in tutto di novità, a trattare una materia, nella quale, non ſolo i mezzani, ma eziandio i più ſolenni e gran Maeſtri d'Analiſi ſi eſercitarono in modo, che queſta parte omai abbiaſi generalmente da' Profeſſori per già compiuta e perfet-

 ta;

ta; chi vi ſarà pertanto che proceder voglia con meco sì corteſemente, che inveggendo il titolo del mio Libretto, toſto non lo diſprezzi, e non iſtimi ancora l'Autore che lo compoſe, aſſai malavveduto, e preſuntuoſo? Nullaoſtante io non diffido, qualora quì venga eſpoſto il mio intendimento, non ſolo di potermi ſottrarre da queſto biaſimo, ma che il Pubblico più ſenſato abbia forſe da ricevere in buon grado queſta mia fatica. E primieramente, io non intendo già, propoſto avendo queſta *Maniera di coſtruire l' Equazioni indeterminate &c.*, di detrar punto di quella immortal lode, che meritamente in ciò s'acquiſtarono co' loro ingegnoſiſſimi ritrovamenti tanti chiariſſimi Matematici, come ſe difettuoſi e mancanti foſſero i loro metodi, o fallaci le lor dottrine. Infatti io non potrei giammai luſingarmi di aver conſeguito il fine che mi ſono propoſto, ſe dagli Autori più rinomati (e tra queſti mi pregio di far quì onorata e giuſta memoria del Marcheſe dell'*Opital*, e di Madama *Agneſi*) io non aveſſi appreſo tanti bei lumi, onde rendere utile e pregevole queſto mio lavoro. Ma ſe io diceſſi altresì, che ſiccome egli è proprio de' grandi e ſublimi intelletti l' eſſere di tanto brevi e conciſi nell'eſpreſſioni, quanto abbondano di acuti e pellegrini concetti; dacchè non poſſono mai gl'ingegni di veloce apprenſiva ſcordarſi, ſcrivendo, di parlare a ſe ſteſſi, eziandio quando intendono d'intertenerſi ad iſtruire la gioventù; dirò

coſa

cosa certamente quanto per essi loro onorifica, altrettanto vera; perciocchè confermata ne viene dall'esperienza di tanti Giovani; i quali siccome privi della viva voce del Maestro, non potendo nè dall'Opere de' valent'Uomini, e molto meno da' Compendj far chiara idea de' sottili artifizj dell'Algebra; abbandonano quindi una Scienza, alla Civil Società cotanto utile e necessaria. Per la qual cosa essendo io bastevolmente informato dall'esperienza di me medesimo di quel che richiedano ne' Libri d'Istituzioni que' Giovani principianti, i quali da puro natural genio guidati s'inoltrano senza scorta veruna nell'arduo cammino dell'analitiche speculazioni, ho io quì tentato in questa dilettevole e importantissima pratica della *Costruzione dell' Equazioni indeterminate &c.* di spianare ad essi la via, togliendo loro davanti ogni dubbio e oscurità, senza però unquemai perdergli di vista nè punto abbandonargli; sicchè possano venire a termine felicemente del loro corso. E tantoppiù volentieri fra tutte l'altre ho scelto a dichiarare questa materia; sì perchè troppo chiaro si vede, essere appunto questa quel primo scoglio che si attraversa agli studiosi d'Analisi, onde poi perdono ogni coraggio di proseguire; sì perchè ben compresa questa prova sensibile, ossia quest' ultimo ingegnoso sperimento della Verità ritrovata, pare che l'Algebra, anche la più austera e sublime, si renda nel progresso a' Giovani assai più dimestica e piana. Ora siccome il

poco ordine, la ſcarſezza degli eſempj, la oſcura brevità dell' eſpreſſioni, e la varietà delle regole ſono appunto quegli oſtacoli che impediſcono onde non ſi aggiunga perfettamente la cognizione di una qualunque Verità, e per conſeguente non ſe ne ritenga la pratica; così ho io procurato di eſtendere, ampliare, ed ordinare, quanto il meglio per me ſi è potuto chiaramente la materia; nè tanto ho riguardato alla ſemplicità e concinnità della figura, quanto ſono ſtato ſollecito di ſerbare in ogni diverſo caſo l'uniformità delle ſteſſe regole, non variandole in varj caſi de' diverſi aſpetti dell' Equazioni. Quindi, perchè lo Studioſo di Matematica, ſe non in tutto, non aveſſe però molto a dipartirſi, anche in leggendo queſto mio Libro, dalle Opere celebratiſſime del Marcheſe dell' *Opital*, e di Madama *Agneſi*; poichè non abbiamo per mio aviſo chi meglio di queſti due feliciſſimi Ingegni abbia ſaputo ordinare, e inſieme facilitare l'Analiſi; ho voluto perciò pigliare dall' *Opital* l'uniformità coſtante della pratica con la ſua maniera chiariſſima di eſeguirla; applicandola poſcia, e come inneſtandola all'ingegnoſo Metodo delle *Soſtituzioni* uſato dall' *Agneſi*: dacchè ſe il Metodo delle *Comparazioni*, di che ſi ſerve l'*Opital*, ſa forſe troppo di materiale, e alla memoria è aſſai difficile il conſervarſelo per le occorrenze; d'altra parte nella pratica dall'*Agneſi* adoperata, ſe giuſto motivo ſi ha certamente di ammirare l'ingegno di queſta incompa-

rabil

rabil Donna, inveggendola sì felicemente a procedere per varie ſtrade allo ſteſſo termine; non potrebbe però forſe negarſi, che la ancor rude Gioventù, perdendo non rade volte il coraggio di ſeguitarla, non la deſideri per sè, anzi che più ſottile ed ingegnoſa, più facile e chiara. Ognuno vede pertanto, che io non ho già preteſo nell' eſtendere queſto Trattato, di recare nuovi metodi, ma piuttoſto di proporre e di riſchiarare con nuova maniera le antiche dottrine: il che ſuole unicamente deſiderarſi da' Giovani principianti; a' quali ora indirizzando io queſta primizia de' miei ſtudj, ſpero che me ne ſapranno buon grado; perciocchè vedranno per eſperienza, che bene appreſe le poche regole da me eſpoſte, potranno agevolmente arriſchiarſi in breve tempo a coſtruire di per ſe ſteſſi qualunque più complicata Equazione, che loro veniſſe propoſta. Nè io finalmente poſſo temere, che il Pubblico più ſenſato e diſcreto, il quale ſoltanto io venero e riſguardo, venga a riprendermi, come riſchiarato avendo quì ogni più minuta coſa, abbia io così fomentata in certa guiſa la natural pigrizia degl'ingegni: poichè dal mio già ſopra eſpoſto intendimento, chiunque ſaprà ben rilevare, che ho io mirato unicamente a' Giovani di mediocre capacità e ſenza guida di Maeſtro; intorno a' quali, non già perchè impigriſcano, ma perchè non diſperino, mi pare che poſſa riputarſi

tarſi commendabiliſſima la cura, di facilitar loro, quanto ſi può, queſto ſtudio; ſiccome quelli che non ſono poi di così ſcarſo numero, e che per eſperienza ſi vede, che i più attenti ſono, i più laborioſi, e i più atti per le pratiche operazioni; donde appunto deriva la grandiſſima utilità, che ne apportano le Matematiche.

ALLO

ALLO STUDIOSO
DI MATEMATICA

Dionigio Ramanzini.

SE ſogliono preſſochè tutti gli Stampatori di qualche Opera dar contezza al Pubblico della diligenza adoperata nelle loro Stampe, lo ſi dee fare maſſimamente nelle materie Analitiche, di cui gli errori, ſiccome ſono i più facili da commetterſi, così rieſcono i più difficili da ſcuoprirſi da'Principianti, atteſa l'arduità della Scienza che trattaſi, e la riflеſſione matura che vi ſi richiede. Io non pertanto, Lettor benigno, dopo la fortuna avuta di pubblicare in tal genere altre rinomatiſſime, ed a miei Torchj onorevoliſſime Opere, ſpero di aver proceduto con piede ſicuro anche nell'Edizione di queſto, picciolo sì, ma come fu chiamato per uno de' più celebri e intelligenti P. Profeſſori che vivano, il P. Let. COLOMBO, *Trattato bello, chiaro, e dotto*; onde non venga meno all' Autore la lode, che dee ritrarne: e tu mi debba ſapere buon grado del leggerlo per mia induſtria in una, per quanto ſi è potuto, nitida e corretta Edizione. Baſta ſolo avvertire, che le *parenteſi* sì grandi e sì picciole ſi ſono adoperate indifferentemente; dovendoſi ſempre intendere compreſa tutta la frazione, quando venga racchiuſa dalla *parenteſi* la linea, che divide il numeratore dal denominatore. Vivi felice

NOI

NOI
RIFORMATORI
DELLO STUDIO DI PADOVA.

AVendo veduto per la Fede di Reviſione, ed Approvazione del *P. F. Seraſino Maria Maccarinelli* Inquiſitor General del Santo Officio di *Verona* nel Libro intitolato *Modo facile e chiaro per coſtruire l' Equazioni tutte indeterminate del ſecondo grado. de' luoghi alle Sezioni Coniche di Melchiore Griffi di Lendinara mſ.* non v' eſſer coſa alcuna contro la Santa Fede Cattolica, e parimente per Atteſtato del Segretario Noſtro, niente contro Principi, e buoni coſtumi concediamo Licenza a *Dioniſio Ramanzini* Stampator *di Verona*, che poſſi eſſer ſtampato, oſſervando gli ordini in materia di Stampe, e preſentando le ſolite Copie alle Publiche Librarie di Venezia, e di Padova.

Dat. li 23. *Settembre* 1759.

(ſ. Alviſe Mocenigo 4°. Kav. Proc. Riform.
(Marco Foſcarini Kav. Proc. Riform.
(Franceſco Moroſini 2°. Kav. Proc. Riform.

Regiſtrato in. Libro a Carte 22. al Num. 128.

Gio. Girolamo Zuccato Segretario.

DE-

DEFINIZIONI.

1. PEr il termine di Sezione Conica s'intende qualunque delle quattro linee curve, Circolo, Parabola, Elliſſi, Iperbola, o Iperbole oppoſte.

2. Luogo geometrico è una linea, col mezzo della quale ſi coſtruiſcono i problemi indeterminati: ed in particolare, ſe la linea retta ſodisfà per la coſtruzione, il luogo ſi dice alla Linea retta, così pure ſi dirà luogo al Circolo, ſe di queſto dovrà ſervirſi: e così parlando riſpetto ad altre Curve.

3. Il Circolo è una linea curva, la eſſenziale proprietà della quale ſi è, che una qualunque Ordinata ſia media proporzionale fra i ſegmenti del Diametro; e conſeguentemente il di lei quadrato è uguale al rettangolo degli ſteſſi ſegmenti. Se adunque nel Circolo AE DM ſi farà il raggio AC $= a$, e dal centro una qualunque Aſſiſſa CB $= x$, e l'Ordinata BE $= y$, ſarà AB $= a + x$, BD $= a - x$, e però AB . BD $= aa - xx$: quindi ſarà $yy = aa - xx$, Equazione ſempliciſſima al Circolo riſpetto al quadrante SED. Che ſe ſi prenda l'Ordinata, o l'Aſſiſſa negativa, ovvero tutte due, ſem- TAV. I. Fig. 1.

pre ſi verificherà la medeſima Equazione; e però eſſa compete a tutto il Circolo.

4. Nella Parabola Apolloniana abbiamo per ſua primaria proprietà, che il quadrato di una qualunque Ordinata è uguale al rettangolo del Parametro nell'Aſſiſſa ſull'Aſſe, ſe l'angolo delle Coordinate è retto, o ſul Diametro, ſe l'angolo è obliquo. Chiamato adunque il Parametro $= a$, una qualunque Aſſiſſa AB $= x$, la corriſpondente Ordinata BC $= y$, poſitiva, e negativa BD $= -y$; ſarà in tutti e due i caſi $yy = ax$. E quì ſi avverta, che non ſi può prendere l' Aſſiſſa negativa, perchè in tal caſo la Equazione ſarebbe $yy = -ax$, ovvero $ax = -yy$, e perciò la Curva immaginaria. Che ſe poi (Fig. 2.) ſulla ſteſſa AB dal punto A ſi voleſſero le y, e le Ordinate BC foſſero $= x$, BD $= -x$; ſarà la Equazione $xx = ay$; nella quale ſi poſſono prendere le x poſitive, e negative, ma ſolo poſitive le y, per la ragione or ora addotta.

TAV. I. Fig. 2.

5. Una delle principali proprietà dell'Elliſſi è, che il rettangolo de' ſegmenti del Diametro, ſia al quadrato della corriſpondente Ordinata; come il quadrato dell' Aſſe o Diametro traſverſo, al quadrato dell'Aſſe o Diametro conjugato. Nella Elliſſi adunque ADEF, chiamato il Diametro traſverſo $= 2a$, il conjugato $= 2c$; preſa dal centro una qualunque Aſſiſſa BC $= x$, la corriſpondente Ordinata BD $= y$, ſarà l'analogìa $aa - xx : yy = 4aa : 4cc$; e perciò l'Equazione $aa - xx = \frac{aayy}{cc}$; la quale ſempre ſi verifica, prendendo anche l' Ordinata, o l'Aſſiſſa negativa, oppure tutte e due negative.

TAV. I. Fig. 3.

6. La

6. La Iperbola, o Iperbole oppoſte in due modi ſi conſidereranno: ſe vengono queſte riferite agli Aſſi loro o Diametri, oppure ſe deſcritte ſiano fra gli Aſſintoti. E quanto al primo già è noto, che una di eſſe primaria proprietà è, che il rettangolo della ſomma nella differenza del Semiaſſe o Semidiametro traſverſo, e della Aſſiſſa, al quadrato dell' Ordinata, ſta come il quadrato dell' Aſſe o Diametro traſverſo, al quadrato del conjugato. Nell' Iperbola dunque CAD, eſſendo l'Aſſe traſverſo AG $= 2a$, TAV. I. Fig. 4. il conjugato LM $= 2c$, NB $= x$, BD poſitiva $= y$, ſarà $xx - aa : yy = 4aa : 4cc$, e perciò l'Equazione $\frac{aayy}{cc} = xx - aa$; ſe poi ſi chiami NB $= y$, BD $= x$, ſarà $yy - aa : xx = aa : cc$; e per conſeguenza l' Equazione $yy - aa = \frac{aaxx}{cc}$, cioè $\frac{ccyy}{aa} = xx + cc$; e riſolvendo queſta Equazione in analogìa, $xx + cc : yy = cc : aa$, cioè $\overline{NE}^2 + \overline{NM}^2 : \overline{ED}^2 = \overline{NM}^2 : \overline{NG}^2$. E in queſta curva ancora ſi può prendere la Ordinata, o l'Aſſiſſa negativa, ed anche tutte due negative. Se le Iperbole foſſero equilatere, nel qual caſo ſarebbe $2a = 2c$, avremmo l'Equazioni $yy = xx - aa$, e $yy = xx + cc$. Quanto alla Iperbola TAV. I. Fig. 5. fra gli Aſſintoti, il rettangolo di una qualunque AB preſa ſull'Aſſintoto bB nella BC Ordinata parallela all'Aſſintoto MN, o di $Ab \cdot bc$, è ſempre coſtante, cioè uguale ad un rettangolo noto; e però fatta AB $= x$, BC $= y$, e preſa Ab negativa $= -x$, $bc = -y$, ſarà tanto AB . BC, quanto $Ab \cdot bc$

$= xy$; e però la Equazione $xy = ab$. La Equazione poi $-xy = ab$ servirà per le opposte Iperbole negli angoli BAM, bAN.

COROLLARIO.

7. QUindi è chiaro, che venendoci proposta da costruire una Equazione composta e complicata, per renderla facilmente costruibile, tutto l'artifizio che devesi usare, consiste nell' introdurre opportune sostituzioni, onde maneggiata, e ridotta, ella ci si presenti in fine sotto l'aspetto delle semplici Equazioni, le quali abbiamo già veduto come si vengano a formare; del che parleremo ne' Problemi seguenti.

AVVERTIMENTO.

8. NOn si è parlato punto di quelle Equazioni, le quali essendo all' Ellissi, e all'Iperbole opposte, per costruirle prender si vogliano le Assisse dai vertici di tali Curve; ciò per altro a bello studio si è omesso, sì perchè così fatte Equazioni maneggiate che sieno, ci portano all'Equazione finale, che veste la forma di quelle già esaminate, sì perchè ognuno da sè con molta facilità se le potrà formare, e quindi farvi quelle considerazioni, che opportunamente noi pure faremo su quelle che abbiamo già esposto. Parimente si è ristretto il discorso alla sola proprietà delle sopraccennate Curve, che compete a i loro Assi, o Diametri; perchè il metodo di costruire l' Equazioni più composte riesce per tal via

via più ſemplice, che ſervendoſi del Diametro, e Parametro corriſpondente, come chiaramente in appreſſo ſi farà vedere.

CAPO PRIMO

Dell' Equazioni alla Parabola.

9. PEr diſcernere a prima viſta, propoſta che ci venga una Equazione, s'ella ſia alla Parabola, due caſi fa d'uopo diſtinguere: l'uno è, quando non c'entra il rettangolo delle Coordinate tra loro, cioè xy; l'altro, quando vi ſi trova. Nel primo caſo adunque, perchè il luogo ſia alla Parabola, vi deve eſſere un quadrato ſolo delle incognite col ſegno poſitivo, ed al più il rettangolo delle coſtanti in una o l'altra, o anche di tutte due le incognite nelle ſteſſe coſtanti; come per eſempio $yy + ay - 2cx + aa = 0$; nel ſecondo vi debbono eſſere tutti due i quadrati delle incognite col ſegno poſitivo, ma però il quadrato della metà del coefficiente, che moltiplica il piano xy, deve eſſere uguale al coefficiente del quadrato di quell'incognita, ſecondo cui non è ordinata la Equazione, e negli altri termini li rettangoli di una, o di tutte due le incognite nelle coſtanti, come ſe foſſe $yy + \frac{2bxy}{a} + \frac{bbxx}{aa} - cx = 0$.

PRO-

PROBLEMA I.

10. ABbiasi a costruire la Equazione $yy - ax - cc = 0$, cioè $yy = ax + cc$; la sostituzione da farsi è di $x + \frac{cc}{a} = u$. La regola è, premessa la trasposizione de' termini, di fare uguale a una nuova incognita l'indeterminata $x \pm$ tutto il termine costante, secondo che questo ha il segno $\pm$, diviso per il coefficiente della detta indeterminata x; fatta dunque la su accennata sostituzione, sarà $yy = au$: ed ecco ridotta la Equazione alla sempliciſſima spezie, come al num. 4. Al vertice A, Diametro AC, col Parametro $= a$, si descriva la Parabola ADE, in essa saranno le AC le u, e le CD, CE le y, una positiva, e l'altra negativa; e perchè per la sostituzione fatta abbiamo $x = u - \frac{cc}{a}$; presa dal vertice AB $= \frac{cc}{a}$, sarà BC $= x$; nel punto B sarà l'origine delle x, verso C positive, e verso A negative; perchè essendo AB $= \frac{cc}{a}$, ed AC $= u$, sarà BC $= \frac{cc}{a} - u = -x$. Ora volendosi accertare, se il metodo è giusto, basta istituire l'Equazione sul fondamento della proprietà della Curva, e trovandosi la Equazione da prima proposta, sarà indizio, che il tutto starà ben fatto; il che a motivo di chiarezza si farà ad ogni Problema. Nel caso adunque presente, deve essere, $a \cdot AC = \overline{DC}^2$; ma AC $= x + \frac{cc}{a}$, CD $= y$;

TAV. I. Fig. 6.

dun-

dunque $ax + cc = yy$, cioè $yy - ax - cc = o$: il che &c.

PROBLEMA II.

11. Sia da coſtruirſi la Equazione $yy - ay - ax + ab = o$, ch'è la ſteſſa, che $yy - ay = ax - ab$: ſi compiſca il quadrato nel primo membro, ſarà $yy - ay + \frac{aa}{4} = ax + \frac{aa}{4} - ab$: e facendo le due ſoſtituzioni, una di $y - \frac{a}{2} = z$, l'altra di $x + \frac{a}{4} - b = u$, (num. 10.) ſarà $zz = au$, Equazione alla Parabola (num. 4.). Quì ſi avverta, che la quantità $\frac{a}{4} - b$ può eſſere uguale, maggiore, o minore dello zero, ſecondo che $\frac{a}{4}$ è uguale, maggiore, o minore di b. Sia dunque il primo caſo; non vi ſarà biſogno della ſeconda ſoſtituzione, dacchè ſarà $zz = ax$. Al vertice A, Diametro AB, col Parametro $= a$, ſi deſcriva la Parabola ACD; ſaranno le AB le x, le BC le z poſitive, e le BD le z negative: fatta dunque FG parallela alle Ordinate $= \frac{a}{2}$, e condotta EH pure parallela al Diametro AB, nel punto E verſo H ſarà l'origine delle x poſitive, che a cauſa degl'immaginarj non ſi potranno prendere negative; e ad eſſe tra i punti E, F, corriſponderanno due Ordinate poſitive, nel punto F un' Ordinata ſola poſitiva, ed oltre il punto F una poſitiva, ed una nega- TAV. I. Fig. 7.

negativa. Ora quì deve eſſere, $a : AB = \overline{BC}^2$; ma $AB = x$, $BC = y - \frac{a}{2}$; dunquè $yy - ay + \frac{aa}{4} = ax$: ma poichè $\frac{a}{4} - b = o$, ſarà $\frac{aa}{4} - ab = o$, avremo ancora $yy - ay + \frac{aa}{4} = ax + \frac{aa}{4} - ab$, cioè $yy - ay - ax + ab = o$: Nel ſecondo caſo, quando cioè $\frac{a}{4} - b > o$, ſi faccia $\frac{a}{4} - b = m$, la ſeconda ſoſtituzione ſarà di $x + m = u$, e però $zz = au$. Al vertice A, Diametro AD, Parametro $= a$, ſi deſcriva la Parabola AML, ſaranno in eſſa le AD le u, le MD le z poſitive, e le DL le z negative: fatta pertanto $AC = m = \frac{a}{4} - b$, e condotta AE parallela alle Ordinate $= \frac{a}{2}$, e tirata EH pure parallela al Diametro, nel punto G verſo H ſarà l'origine delle x poſitive, e verſo il punto E delle negative; alle quali Aſſiſſe poſitive fra i punti F, H corriſponderanno due Ordinate, una poſitiva cioè la ſuperiore, l'altra negativa, ch'è l'inferiore; nel punto F un'Ordinata ſola poſitiva, e tra i punti F, E, tutte due poſitive. Quì ancora per proprietà della Curva ſi ha, $a : AD = \overline{DM}^2$; ma $AD = u = x + m = x + \frac{a}{4} - b$, $DM = y - \frac{a}{2}$; dunque $yy - ay + \frac{aa}{4} = ax + \frac{aa}{4} - ab$, cioè $yy - ay - ax + ab = o$. Sia in terzo luogo $\frac{a}{4} - b < o = -m$, la

TAV. I. Fig. 8.

la ſeconda ſoſtituzione ſarà di $x - m = u$, e però $zz = au$. Al vertice A, Diametro AE, col Parametro $= a$, ſi deſcriva la Parabola AGH, in diretto ſi aggiunga ad AE, la $AM = m$, ſarà $ME = u + m = x$; condotta poi MN parallela alle Ordinate della Parabola, facendola $= \frac{a}{2}$, e tirata NF parallela al Diametro, nel punto N verſo F ſarà l'origine delle x ſolo poſitive, nè ſi potranno avere le negative a cagione degl'immaginarj; alle quali fra i punti O, D corriſponderanno due Ordinate poſitive, nel punto D una ſola poſitiva, ed oltre il punto D un'Ordinata poſitiva, ed una negativa: ed in fatti parlando del primo, infra i punti O, D abbiamo EG ſuperiore $= z$; ma $FE = \frac{a}{2}$; dunque $FG = z + \frac{a}{2} = y$, così pure $HE = -z$; ma $FE = \frac{a}{2}$; dunque $FH \frac{a}{2} + z = y$: nel punto D ſi ha $DC = z + \frac{a}{2} = y$, ed oltre il detto punto, $EG = z$; ma $FE = \frac{a}{2}$, dunque $FG = z + \frac{a}{2} = y$, $FH = -z - \frac{a}{2} = -y$: il che &c. Per proprietà della Curva abbiamo $a \cdot AE = \overline{EG}^2$; ma $AE = u = x - m = x + \frac{a}{4} - b$, $EG = y - \frac{a}{2}$; dunque $ax + \frac{aa}{4} - ab = yy - ay + \frac{aa}{4}$, che è la ſteſſa di $yy - ay - ax + ab = 0$. il che &c.

TAV. I. Fig. 9.

PROBLEMA III.

12. SIa da coſtruirſi la Equazione $yy - ay + ax - aa = o$, oppure $yy - ay = aa - ax$; ſi compiſca il quadrato nel primo membro dell'Equazione, ſarà $yy - ay + \frac{aa}{4} = \frac{5aa}{4} - ax$; e fatta la ſoſtituzione di $y - \frac{a}{2} = z$, indi (num. 10.) di $\frac{5a}{4} - x = u$, avremo $zz = au$, luogo alla Parabola. Al vertice A, Diametro AM, Parametro $= a$, ſi deſcriva la Parabola ADG, fatta $AM = \frac{5a}{4}$, e preſa $AO = u$, ſarà $MO = \frac{5a}{4} - u = x$; facendoſi poi $MN = \frac{a}{2}$, e tirata NP parallela al Diametro, nel punto N verſo F ſarà l'origine delle x poſitive: ma $DO = z$; dunque FD ſuperiore $= z + \frac{a}{2} = y$, FD poi inferiore $= -z - \frac{a}{2} = -y$. Alle Aſſiſſe pertanto poſitive corriſponderanno tra i punti N, C due Ordinate, poſitiva una, negativa l'altra; nel punto C una ſola Ordinata poſitiva, eſſendo $CC = z + \frac{a}{2} = y$; ed oltre il punto C due Ordinate poſitive, eſſendo PE maggiore $= z + \frac{a}{2} = y$, PE minore $= \frac{a}{2} + z = y$, per eſſere SE inferiore $= -z$. Per proprietà della Curva abbiamo $a \cdot AO = \overline{LO}^2$; ma $AO = \frac{5a}{4} - x$, $DO = y$

TAV. I. Fig. 10.

$= y - \frac{a}{2} = -y + \frac{a}{2}$; e però $\frac{5aa}{4} - ax = yy - ay + \frac{aa}{4}$, cioè $yy - ay + ax - aa = 0$: il che &c.

PROBLEMA IV.

13. DEbbasi costruire la Equazione $xx - ay + aa = 0$, oppure $xx = ay - aa$; facciasi la sostituzione (num. 10.) di $y - a = u$, ed avremo $xx = au$. Col Diametro AB, Parametro $= a$, si descriva la Parabola ADC, saranno in essa le AB le u, e le BC, BD le x, una positiva, l'altra negativa: ma per la sostituzione fatta abbiamo $y = u + a$; dunque fatta $AE = a$, e tirata EF parallela alle Ordinate della Parabola, indi FC parallela pure ad EB, sarà $EF = x$, $FC = y$. Nel punto adunque E verso F sarà l'origine dalle x positive, e verso M negative, alle quali x, sì positive, come negative, corrisponderà sempre un'Ordinata solo positiva, e ciò a cagione degl'immaginarj. Ora deve essere per proprietà della Curva $a . AB = \overline{BC}^2$: ma $AB = y - a$, $BC = x$; dunque $ay - aa = xx$, cioè $xx - ay + aa = 0$. TAV. II. Fig. 11.

PROBLEMA V.

14. ABbiasi da costruire la Equazione $xx - 2ax + ay - aa = 0$, cioè $xx - 2ax = aa - ay$; si compisca il quadrato nel primo membro della Equazione, avremo $xx - 2ax + aa = 2aa - ay$; si facciano le due sostituzioni, una di $x - a = z$, l'altra (num. 10.) di $2a - y = u$; e sarà $zz = au$. Al vertice A, Parametro $= a$, Diametro AB, si descriva la Parabola ACD; fatta in essa $AB = 2a$, e presa $AG = u$, sarà $BG = 2a - u = y$ positiva: si prenda $EB = a$, e si conduca EF parallela ad AB, e FG parallela pure a CD, sarà $BG = FE = y$, $BD = z$: ma $EB = a$; adunque $ED = z + a = x$ positiva: nel punto E verso D sarà dunque l'origine delle x positive, e verso C negative; poichè $BC = -z$, e $CE = -z - a = -x$ negativa; alle quali x sì positive, come negative, prese dentro la Curva, corrisponderà solo un' Ordinata positiva: prese poi fuori della Curva sì positive, sì negative corrisponderanno ad esse due altre Ordinate y negative, che vanno alla convessità della Curva. Proprietà è della stessa Curva, che $a \cdot AG = \overline{GH}^2$; ma $AB = 2a$, $BG = y$, dunque $AG = 2a - y$, $GH = x - a$; sarà perciò $2aa - ay = xx - 2ax + aa$, cioè $xx - 2ax + ay - aa = 0$: il che &c.

TAV. II. Fig. 12.

PRO-

PROBLEMA VI.

15. DAta da coſtruire la Equazione $yy - \frac{2bxy}{a} + \frac{bbxx}{aa} - bx + cc = 0$, cioè $yy - \frac{2bxy}{a} + \frac{bbxx}{aa} = bx - cc$, ſi faccia $y - \frac{bx}{a} - z$, e $x - \frac{cc}{b} = u$ (num. 10.); ſarà $zz = bu$. Sulla retta indefinita AE, ſi deſcriva il triangolo ABC coi lati AB $= a$, BC $= b$, cioè il primo lato AB $=$ al denominatore della frazione, che moltiplica l'incognita x nella prima ſoſtituzione fatta di $y - \frac{bx}{a} = z$, il ſecondo $=$ al numeratore di eſſa frazione; e poichè l'angolo delle Coordinate quì ſi ſuppone dato, il quale, come ſi vedrà, viene ad eſſere $=$ ABC, ſarà pure per la Trigonometria in eſſo triangolo noto il terzo lato AC, che ſi chiami $= f$. Si producano pure indefinitamente le rette AB, AC, e ſi compiſca il triangolo ADE, facendoſi già DE parallela a BC; ſarà per la ſimilitudine de' triangoli ABC, ADE, preſa AD $= x$, DE $= \frac{bx}{a}$. Sulla AD ſi prenda AF $= \frac{cc}{b}$, ſarà FD $= x - \frac{cc}{b} = u$; e condotte FG, HG, l'una parallela a BC, l'altra a FD, ſarà per la ſimilitudine de' triangoli ABC, GHE, GE $= \frac{fx}{a} - \frac{ccf}{ab}$. Ora al vertice G, Diametro GE, TAV. II. Fig. 13.

GE, Parametro $= \frac{ab}{f}$; (il quale in queſte Equazioni prender ſi dee ſempre per regola generale = alla quarta proporzionale della nota linea AC nel triangolo ABC, del denominatore della frazione che moltiplica quella incognita, per la quale non viene ordinata la Equazione nella prima ſoſtituzione fatta, e del Parametro dell'Equazione ridotta, cioè di $f : a = b : \frac{ab}{f}$) ſarà la ſuperiore DM $= y$ poſitiva, e la inferiore $= -y$ negativa: imperocchè EM $= z$, ſtante la Equazione finale: ma DE $= \frac{bx}{a}$; dunque DM $= z + \frac{bx}{a} = y$ nel primo caſo; EM $= -z$, parlando del ſecondo: ma è pure DE $= \frac{bx}{a}$; dunque DM $= -z - \frac{bx}{a} = -y$. Prendendoſi adunque le $x \geq$ AO, corriſponderanno ad eſſe due Ordinate una poſitiva, l'altra negativa; facendole = AO, lor corriſponderà nel Punto O un'Ordinata ſola poſitiva; e prendendole tra i punti F, O, corriſponderanno ad eſſe due Ordinate, tutte e due poſitive. Per proprietà della Curva abbiamo $\frac{ab}{f} \cdot GE = \overline{ME}^2$: ma $GE = \frac{fx}{a} - \frac{ccf}{ab}$, $\overline{ME}^2 = (y - \frac{bx}{a})^2$; dunque $\frac{ab}{f} \cdot (\frac{fx}{a} - \frac{ccf}{ab}) = yy - \frac{2bxy}{a} + \frac{bbxx}{aa}$, cioè $yy - \frac{2bxy}{a} + \frac{bbxx}{aa} - bx + cc = o$: il che &c.

PRO-

PROBLEMA VII.

16. DEbbasi costruire la Equazione $yy + xy + \frac{xx}{4} - 2by - bb = o$, cioè $yy + xy + \frac{xx}{4} = 2by + bb$: si faccia la sostituzione di $y + \frac{x}{2} = z$, avremo $zz = 2by + bb$: nel presente caso, in cui c'è il rettangolo delle costanti nell'incognita, secondo la quale è ordinata la Equazione, bisogna fare sparire detta incognita, e in luogo di lei adoprar quel suo valore, che si cava dalla prima sostituzione fatta; come quì essendoci il termine $+ 2by$, e cavandosi dalla prima sostituzione $y = z - \frac{x}{2}$, si sostituisca un tal valore in luogo di y nell' Equazione $zz = 2by + bb$, e sarà $zz = 2bz - bx + bb$, cioè $zz - 2bz = bb - bx$: si compisca ora il quadrato nel primo membro, ed avremo $zz - 2bz + bb = 2bb - bx$; e fatte le due sostituzioni, una di $z - b = u$, l'altra (num. 10.) di $2b - x = q$, sarà $uu = bq$. Sulla retta AC si descriva il triangolo ABC, coi lati $AB = 2$, $BC = 1$, e si chiami la nota $AC = f$, sulla AB si prenda $AP = x$, e $AE = 2b$, sarà (tirate PM, e FE parallele a BC) $PM = \frac{x}{2}$; e condotta ancora MD parallela a PE, sarà $MF = bf - \frac{fx}{2}$, essendo $PE = 2b - x$, e simili i triangoli ABC, MDF. Ora poichè si è fatta la seconda TAV. II. Fig. 14.

conda

conda ſoſtituzione di $z - b = u$, vedendo che la z appartiene alla indeterminata y, ſi alzi $AN = b$, perchè nell' accennata ſoſtituzione ſi ha il termine $-b$; e ſi dovrebbe abbaſſare, ſe il detto termine foſſe poſitivo; e condotta NO parallela ad AF, al vertice O, Parametro $= \frac{2b}{f}$ (num. 15.) Diametro NO ſi deſcriva la Parabola KOK, ſarà in eſſa, atteſa la Equazione finale, HK ſuperiore $= u$, HK inferiore $= -u$: ma $HM = b$; dunque MK ſuperiore $= u + b = z$: ma $PM = \frac{x}{2}$; dunque $PK = z - \frac{x}{2} = y$ poſitiva; ma MK inferiore $= -u - b = -z$, e $PM = \frac{x}{2}$, e però $PK = \frac{x}{2} - z = -y$ negativa. Alle x dunque negative, e poſitive preſe minori di AQ, corriſponderanno due Ordinate y, una poſitiva, l'altra negativa; preſe $= AQ$, ſi avrà nel punto Q un'Ordinata ſola negativa; preſe tra i punti Q, ed E, ne corriſponderanno due, ambe negative. La proprietà della Curva ci dà $\frac{2b}{f}.(bf - \frac{fx}{2}) = (y + \frac{x}{2} - b)^2$, cioè $2bb - bx = yy + xy + \frac{xx}{4} - 2by - bx + bb$, ch'è lo ſteſſo che $yy + xy + \frac{xx}{4} - 2by - bb = 0$: il che &c.

Si avverta, che $AN = b$ deve eſſere parallela alle Ordinate della Parabola.

PRO-

PROBLEMA VIII.

17. Sia la Equazione $xx - \frac{2bxy}{a} + \frac{bbyy}{aa} - 2bx + aa = o$; si faccia la sostituzione di $x - \frac{by}{a} = z$, sarà $zz = 2bx - aa$: e quì, poichè c'è il rettangolo delle costanti nella incognita, per la quale sta ordinata la Equazione, cioè $2bx$, si faccia sparire detta incognita, (num. 16) e sarà $zz = 2bz + \frac{2bby}{a} - aa$; cioè $zz - 2bz + bb = \frac{2bby}{a} + bb - aa$; fatta la sostituzione di $z - b = u$, e per brevità $bb - aa = mm$, avremo $uu = \frac{2bby}{a} + mm$; e fatta parimente l'altra sostituzione di $y + \frac{amm}{2bb} = q$, (num. 10.) sarà $uu = \frac{2bbq}{a}$. Per trovare il Parametro, s'istituisca la proporzione, (num. 15.) della nota $f : a = \frac{2bb}{a} : \frac{2bb}{f} =$ Parametro. Sulla retta AC a sinistra si descriva il triangolo ABC, per essere nell'Equazione prima il termine $\frac{2bxy}{a}$ negativo, e alla destra, se fosse positivo; e sia AB $= a$, BC $= b$, AC nota $= f$, e l'angolo ABC $=$ all'angolo delle Coordinate x, y; si determini AP $= y$, e si tiri la parallela PS a BC, sarà PS $= \frac{by}{a}$, AS $= \frac{fy}{a}$; si prolunghi AP al di sotto, onde sia AQ $= \frac{amm}{2bb}$, essendosi già fatta la ultima

TAV. II. Fig. 15.

ſoſtituzione di $y + \frac{amm}{2bb} = q$, e compiuto il triangolo AQE, facendoſi EQ parallela a PS, ſarà $AE = \frac{fmm}{2bb}$, e però $SE = AS + AE = \frac{fy}{a} + \frac{fmm}{2bb}$: ſi prenda $EO = b$ a parte deſtra di EC, eſſendoſi fatta la ſeconda ſoſtituzione di $z - b = u$; e a parte ſiniſtra della EC, ſe la ſoſtituzione foſſe ſtata di $z + b = u$. Al vertice O, Parametro trovato di $\frac{2bb}{f}$, Diametro OG parallelo a SE, ſi deſcriva la Parabola OM, prolungata EO, in F tenendola parallela a PM, e facendo pure FM parallela QP, ſarà $QF = PM = x$; e conducendo perfine AH parallela a QF, ſarà $HM = AP = y$. Per proprietà della Curva ſi ha $\frac{2bb}{f} . OG = \overline{GM}^2$: ma $OG = SE = \frac{fy}{a} + \frac{fmm}{2bb}$, $GM = x - \frac{by}{a} - b$; dunque $\frac{2bb}{f} . (\frac{fy}{a} + \frac{fmm}{2bb}) = (x - \frac{by}{a} - b)^2$, cioè $\frac{2bby}{a} + mm = xx - \frac{2bxy}{a} + \frac{bbyy}{aa} - 2bx + \frac{2bby}{a} + bb$; ma $mm = bb - aa$, dunque $xx - \frac{2bxy}{a} + \frac{bbyy}{aa} - 2bx + aa = 0$. Che ſia GM $= x - \frac{by}{a} - b$ è chiaro; poichè, ſtante la Equazione finale, è $GM = u$; ma $SG = b$, onde SM $= u$

$= u + b = z$; ma in oltre PS $= \frac{by}{a}$, dunque PM $= z + \frac{by}{a} = x$, e però GM $= x - \frac{by}{a} - b$.

Che se fosse $bb - aa = -mm$, la Equazione $zz - 2bz + bb = \frac{2bby}{a} + bb - aa$, diventerà $zz - 2bz + bb = \frac{2bby}{a} - mm$; e fatte le due sostituzioni di $z - b = u$, e di $y - \frac{amm}{2bb} = q$, sarà $uu = \frac{2bbq}{a}$. In tal caso, si prenda AQ a parte contraria di prima $= \frac{amm}{2bb}$; e condotta RE parallela a QP, sarà SE $= \frac{fy}{a} - \frac{fmm}{2bb}$; e fatta EO $= b$, e parallela a PS, il vertice della Parabola cadrà in O, ed intal caso AH $= x$, HM $= y$; e quì alle x sì positive, che negative corrisponderà sempre un'Ordinata positiva: ma nel primo caso, presa x tra i punti K, H corrisponderà un'Ordinata sola positiva; e presa $=$ AK, corrisponderà solo un'Ordinata $= 0$; e presa $<$ AK, ne corrisponderà pure una sola negativa: lo stesso si osservi prendendo le x negative.

TAV. II. Fig. 16.

TAV. II. Fig. 15.

PROBLEMA IX.

18. SIA l'Equazione $xx + \frac{2bxy}{a} + \frac{bbyy}{aa} - bx = 0$, o ſia $xx + \frac{2bxy}{a} + \frac{bbyy}{aa} = bx$; ſi faccia $x + \frac{by}{a} = z$, ſarà $zz = bx$; e facendo ſparire la incognita x, ſecondo cui è ordinata l'Equazione, ſoſtituendo il di lei valore (num. 16.) di $x = z - \frac{by}{a}$, avremo $zz = bz - \frac{bby}{a}$, cioè $zz - bz + \frac{bb}{4} = \frac{bb}{4} - \frac{bby}{a}$; e fatte le due ſoſtituzioni una di $z - \frac{b}{2} = u$, e l'altra di $\frac{a}{4} - y = p$ (num. 10.), ſarà finalmente $uu = \frac{bbp}{a}$. Sulla retta AS a deſtra, per eſſere il termine $\frac{2bxy}{a}$ nell'Equazione poſitivo, ſi deſcriva il triangolo ABC coi lati $AB = a$, $BC = b$, e ſi chiami al ſolito la nota $AC = f$, e ſia l'angolo ABC = al complemento a due retti dell'angolo delle Coordinate x, y; ſi determini $AQ = y$, ſarà QF, che ſia parallela a BC, $= \frac{by}{a}$, e $AF = \frac{fy}{a}$; ſi faccia $AH = \frac{a}{4}$ ſtante l'ultima ſoſtituzione di $\frac{a}{4} - y = p$, quindi $QH = \frac{a}{4} - y = p = FV$, tirata prima FV parallela alla ſteſſa QH; onde per i tri-

TAV. II. Fig. 17.

i triangoli ſimili ABC, SFV, ſarà SF = $\frac{f}{4}$ — $\frac{fy}{a} = \frac{fp}{a}$; fatta in oltre AD = $\frac{b}{2}$, preſa a deſtra di AS, e parallela a FQ, e condotte DC parallela ad AS, e SC pure parallela ad AD; al vertice C, Parametro = $\frac{bb}{f}$ ſi deſcriva la Parabola RCR, ſi prolunghi FQ ſino alla concavità della Curva in M, preſa una qualunque AP, e fatta PM parallela ad AQ, ſarà eſſa PM = y, e la Parabola il luogo ricercato. Alle x però sì poſitive, che negative, non già preſe fuori della Curva, corriſponderà ſempre un'Ordinata poſitiva; preſe poi fuori, ne corriſponderà una negativa, che andrà alla conveſſità della ſteſſa Curva. Che AP = x, PM = y, è chiaro: perciocchè PM = AQ; ma AQ determinata = y, dunque PM = y: che AP = x, ſi fa vedere così: GM = u, FG = AD = $\frac{b}{2}$, perciò FM = GM + FG = $u + \frac{b}{2} = z$; ma FQ = $\frac{by}{a}$, dunque QM = AP = $z - \frac{by}{a} = x$. La proprietà della Parabola ci dà $\frac{bb}{f}$. CG = $\overline{GM}^2$; ma CG = SF = $\frac{f}{4} - \frac{fy}{a}$, GM = $x + \frac{by}{a} - \frac{b}{2}$; dunque $\frac{bb}{f}$. $(\frac{f}{4} - \frac{fy}{a}) = (x + \frac{by}{a} - \frac{b}{2})^2$, cioè $\frac{bb}{4} - \frac{bby}{a} =$

$xx + \frac{2bxy}{a} - bx + \frac{bbyy}{aa} - \frac{bby}{a} + \frac{bb}{4}$, ch'è lo ſteſſo, che $xx + \frac{2bxy}{a} + \frac{bbyy}{aa} - bx = 0$: il che &c.

PROBLEMA X.

TAV. II. Fig. 18.

19. *Data di poſizione la retta indefinita AB con un punto F fuori di eſſa: Si cerca il luogo di tutti i punti M tali, da' quali condotte le rette MP, MF, l'una perpendicolare ad AB, l'altra al dato punto F, ſia ſempre MP = MF; e perchè vi può eſſere un' infinità di tali punti, ſi cerca quale di eſſi ne poſſa eſſere il luogo.*

SI conduca AF parallela a MP, e MS pure parallela ad AP: chiamiſi $AF = a$, $AP = x$, $MP = y$, ſarà $FS = a - y$, quindi $MF = \sqrt{(xx + yy - 2ay + aa)}$, e però per la condizione del Problema avremo $y = \sqrt{(xx + yy - 2ay + aa)}$; e quadrando, $yy = xx + yy - 2ay + aa$, cioè $xx - 2ay + aa = 0$, luogo alla Parabola (num. 9.): traſportando, avremo $xx = 2ay - aa$; e facendo $y - \frac{a}{2} = u$ (num. 10.) ſarà $xx = 2au$. Nella AS ſi pigli $AO = \frac{a}{2}$, e al vertice O, Parametro $= 2a$, ſi deſcriva la Parabola OM; ſarà eſſa il luogo ricercato. Imperocchè $SM = AP = x$, $OS = u$, ſtante l'

Equa-

Equazione ridotta; ma $AO = \frac{a}{2}$, dunque $AS = MP = u + \frac{a}{2} = y$. La proprietà della Curva richiede che $\overline{SM}^2 = 2a \cdot SO$: ma $SM = AP = x$, $SO = y - \frac{a}{2}$; onde $xx = 2ay - aa$, cioè $xx - 2ay + aa = 0$.

COROLLARIO.

20. E' chiaro, che il punto F è il fuoco della Parabola, essendo $FO = AO = \frac{a}{2} = \frac{2a}{4}$, cioè = alla quarta parte del Parametro, e di più $FM = MP$.

PROBLEMA XI.

TAV. II. Fig. 19.

21. *Date di posizione due rette linee* D N, D R *indefinitamente prolungate sopra un piano, con un punto* C *fuori di esse : si concepisca, che un' angolo dato* C R M *si muova col suo vertice sulla linea* D R, *prima da* B *verso* R, *indi tra* B, *ed* A *cominciando da* B, *in maniera che il suo lato* R C, *che prolungato incontra* D N *in* N, *passi sempre per lo medesimo punto* C, *e che l'altro suo lato* R M *sia sempre terzo proporzionale a* N C, C R. *Si dimanda il luogo di tutti i punti* M, *che si andranno scorrendo con questo moto.*

SI muova primieramente il vertice R lungo la linea D R a parte destra del Punto B; si conducano C A parallela a D N, e C B, che faccia sopra D R al punto B l'angolo C B R = C R M, in modo che cadendo C R sopra C B, anche R M cada sopra B R. Si conduca A Q, che faccia l'angolo Q A B = C B A, e si tiri per uno de' punti M una retta M P parallela ad A Q, e che incontri D R prolungata in P; saranno simili i triangoli C B R, P R M; imperocchè l'angolo esterno C R P = C B R + B C R interni opposti; ma C R M = C B R *per la costruzione;* dunque anco il restante M R P = B C R. In oltre M P R + Q A B = a due retti, attese le parallele A Q, M P; ma Q A B = C B A *per la costruzione*; dunque anco M P R + C B A = a due retti; ma sono pure C B R + C B A = a due retti, dunque, M P R + C B A = C B R + C B A; onde

onde MPR = CBR, quindi ſimili i triangoli MPR, CBR. Si chiamino pertanto AD = a, AB = b, BC = c, e le variabili AP = x, PM = y, AR = z. Sarà sì per cauſa delle parallele DN, AC, che per la condizione del problema AD (a) : AR (z) = CN : CR = CR : RM = CB (c) : RP ($x - z$) = BR ($z - b$) : PM (y); e moltiplicando gli eſtremi, e medj, ſaranno le due equazioni $ax - az = cz$, e $ay = zz - bz$; e facendo ſparire nella ſeconda la z, ſoſtituendo il di lei valore dato per x, cavato dalla prima, che viene ad eſſere (ponendo per brevità $f = a + c$) $\frac{ax}{f} = z$, ſi ridurrà la ſeconda Equazione a queſta $xx - \frac{bfx}{a} - \frac{ffy}{a} = o$, luogo alla Parabola (num. 9.) Sarà perciò $xx - \frac{bfx}{a} + \frac{bbff}{4aa} = \frac{ffy}{a} + \frac{bbff}{4aa}$; e facendo le due ſoſtituzioni, una $x - \frac{bf}{2a} = u$, l'altra di $y + \frac{bb}{4a} = q$ (num. 10.) verrà ad eſſere $uu = \frac{ffq}{a}$. Sulla linea AP, ſi prenda AF = $\frac{bf}{2a}$; e avendo condotta FL parallela a PM, ſi pigli in eſſa FG = $\frac{bb}{4a}$: al vertice G; Diametro GL, Parametro = $\frac{ff}{a}$, ſi deſcriva la Parabola GOM, che abbia per Ordinate alcuna delle rette LM parallela ad AP, la di lei porzione

ne OM sarà il luogo ricercato. Imperocchè proprietà è della Curva che $\frac{ff}{a}$. GL $=$ $\overline{LM}^2$; ma GL $= y + \frac{bb}{4a}$, LM $= x - \frac{bf}{2a}$; dunque $\frac{ff}{a}$. $(y + \frac{bb}{4a}) = (x - \frac{bf}{2a})^2$, cioè $xx - \frac{bfx}{a} - \frac{ffy}{a} = 0$: il che &c.

Si muova il vertice R tra B, ed A cominciando da B, e sia giunto in E; in tal caso è chiaro, che la linea EM cadrà giù della AR; e cada in M: si tiri PM parallela ad AQ, saranno istessamente simili i due triangoli EPM, ECB; imperocchè l'angolo esterno CBR $=$ BEC $+$ ECB interni opposti; ma *per la costruzione*, CEM $=$ CBR; dunque CEM $=$ BEC $+$ ECB; e tolto di comune BEC, sarà PEM $=$ ECB: ma in oltre EPM $=$ QAB alterno $=$ CBA *per la costruzione*; e però simili i due triangoli CEB, EPM; quindi avremo come prima AD (a): AE (z) $=$ NC: CE $=$ CE: EM $=$ CB (c): EP $(x - z)$ $=$ BE $(b - z)$: PM $(-y)$ la quale PM $= -y$, perchè è tirata a parte opposta della prima; e però saranno le due Equazioni $ax - az = cz$; $zz - bz = ay$, dalle quali, come nel primo caso (fatta già $f = a + c$) se ne cava $xx - \frac{bfx}{a} - \frac{ffy}{a} = o$, Equazione pure alla Parabola, che maneggiata nel medesimo modo della prima, e colle stesse sostituzioni, si riduce a questa $uu = \frac{ffq}{a}$.

Si

Si deſcriva come nel primo caſo la ſteſſa Parabola AGOM col Parametro $= \frac{ff}{a}$, ſi prenda pure $FG = \frac{bb}{4a}$, e la Ordinata LM ſi tiri al di ſotto di AR, ſarà $GL = GF - FL = GF - PM$, cioè $= \frac{bb}{4a} + y$, ed $LM = x - \frac{bf}{2a}$, e però ſi troverà la ſteſſa Equazione; quindi la porzione AGO della Parabola AGOM ſarà in queſto caſo il luogo di tutti i punti M ricercati.

CAPO SECONDO

Dell' Equazioni all' Elliſſi.

22. L'Equazione ſempliciſſima all' Elliſſi viene eſpreſſa in queſta forma $aa - xx = \frac{aayy}{cc}$ (num. 5.); dove preſto ſi vede che la radice quadrata del termine coſtante, cioè $a =$ al Semiaſſe, o Semidiametro traſverſo; e ſe la frazione, che moltiplica il quadrato dell' Ordinata è tale, che il di lei numeratore ſia $=$ al termine coſtante diviſo per una qualunque quantità data, la radice di tal denominatore ſarà ſempre il Semidiametro conjugato: ma ſe l'Equazione non abbia queſta condizione, per avere il Diametro conjugato biſogna fare, come il numeratore della frazione che moltiplica il quadrato dell' Ordinata, al ſuo denominatore; così il termine coſtante, al quarto; la di cui radice ſara uguale al Semidiametro conjugato: come per eſempio nell'

Equazione $ab - xx = \frac{ccyy}{aa}$, $\sqrt{ab}$ è = al Semidiametro traſverſo: ma per avere il conjugato, ſi faccia $cc : aa = ab : \frac{a^2b}{cc}$; quindi ſarà $\frac{a}{c}\sqrt{ab}$ = al Semidiametro conjugato: e che ciò ſia vero, deve ſtare (parlando dell'Equazione $ab - xx = \frac{ccyy}{aa}$) $ab - xx : yy = ab : \frac{a^2b}{cc} = \frac{cc}{aa} : 1$; quindi l'Equazione propoſta $ab - xx = \frac{ccyy}{aa}$. Ciò però ſi verifica in quelle Equazioni finali provenienti da quelle primarie, in che non c'entra il rettangolo delle incognite fra loro; le quali perchè ſiano all'Elliſſi, è d'uopo che i due quadrati delle incognite abbiano tutti e due il ſegno poſitivo, e quello dell'Ordinata ſia ſenza frazione, e negli altri termini vi ſia al più il rettangolo di una, o di tutte due le incognite nelle coſtanti; come ſe l'Equazione primaria foſſe $yy - 2ay + \frac{cc\,xx}{bb} - ax + aa = 0$: ma nell'altre Equazioni ridotte, che provengono da quelle primarie, dove c'entra il piano xy, le quali perchè ſiano all'Elliſi, biſogna che il quadrato dell'Ordinata yy ſia libero da frazione, ed abbia inſieme coll'altro qdadrato xx il ſegno poſitivo; e oltre a ciò, che il quadrato della metà del coefficiente che moltiplica il piano xy, ſia minore del coefficiente del quadrato xx, e negli altri termini i rettangoli delle coſtanti nelle incognite; come ſe foſſe l'Equazione $yy - \frac{bxy}{a} + \frac{bbxx}{aa} - ay + cx = 0$; nell'Equazio-

zioni pertanto finali prodotte da queſte, la maniera sì per trovare il Diametro traſverſo, che il conjugato è diverſa; e per maggiore chiarezza ſe ne parlerà nel caſo de' Problemi, che ſi andranno proponendo.

COROLLARIO.

23. DAll' Equazioni all' Elliſſi naſcono quelle al Circolo: e ciò avviene (parlando di quelle Equazioni in che da prima non c'entra il piano xy) quando i quadrati delle incognite ſono tutti due liberi da frazione, e l'angolo che fanno tra eſſe è retto; come ſe foſſe $yy - 2cy + xx - bx + aa = 0$: il che anche ci moſtra evidentemente la ſteſſa Equazione all' Elliſſi $aa - xx = \frac{aayy}{cc}$, perchè in tal caſo il Diametro traſverſo è uguale al conjugato, cioè $2a = 2c$; e però l' Equazione ſi muterà in queſta $aa - xx = yy$, ch'è al Circolo (num. 3.): ma nell' altre Equazioni, è d' uopo che non ſolo i due quadrati dell' incognite ſieno liberi da frazione, e col ſegno poſitivo; ma di più, che l' angolo dell' Ordinate al Diametro ſia retto; come il tutto s' intenderà meglio da' Problemi.

PRO-

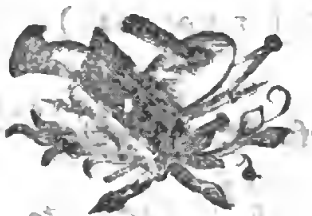
PROBLEMA I.

24. SIA da costruirsi l'Equazione $yy - 2ay + \frac{aaxx}{cc} - bb = 0$, cioè $yy - 2ay = bb - \frac{aaxx}{cc}$: si compisca il quadrato nel primo membro, sarà $yy - 2ay + aa = aa + bb - \frac{aaxx}{cc}$; si faccia $y - a = z$, sarà $zz = aa + bb - \frac{aaxx}{cc}$, ch'è lo stesso, che $\frac{cczz}{aa} = \frac{2\,2\quad 2\,2}{\frac{ac + bc}{aa}} - xx$: il Semidiametro trasverso è certo $c\sqrt{(\frac{aa+bb}{a^2})}$ (num. 22.): e per trovare il conjugato si faccia (numer. citato) $cc : aa = \frac{2\,2\quad 2\,2}{\frac{ac + bc}{aa}} : aa + bb$; quindi $2\sqrt{(aa + bb)} =$ al Diametro conjugato. Col Diametro dunque trasverso $AB = \frac{2c\sqrt{[aa+bb]}}{a}$, e conjugato $= 2\sqrt{(aa + bb)}$, si descriva la Ellissi AEBD, sarà stante l'Equazione ridotta, $CF = x$, $FG = z$: si prolunghi al di sotto FG, e si prenda $FH = a$, conducendosi CM parallela alla stessa FH, sarà $HG = z + a = y$, $MH = CF = x$: avremo adunque nel punto M l'origine delle x positive verso H, e negative verso Q; alle quali sì positive $\prec$ MO, come negative $\prec$ MP

TAV. II. Fig. 20.

cor-

corriſponderanno ſempre due Ordinate, una poſitiva, l'altra negativa: preſe poi poſitive > M O, ma tra' punti O, S; così pure preſe negative > P M, ma tra i punti P, Q, loro corriſponderanno due Ordinate poſitive: preſe poi finalmente = M O eſſendo poſitive, e = M P eſſendo negative, ſi avrà una ſola Ordinata poſitiva. Per proprietà della Curva abbiamo $\overline{CB}^2 - \overline{CF}^2 : \overline{FG}^2 = \frac{4a^2c^2 + 4b^2c^2}{a^2a^2} : 4aa + 4bb = 1 : \frac{aa}{cc}$: ma $\overline{CB}^2 = \frac{aacc + bbcc}{aa}$, $\overline{CF}^2 = xx$, $\overline{FG}^2 = yy - 2ay + aa$; ſarà dunque $\frac{aacc + bbcc}{aa} - xx : yy - 2ay + aa = 1 : \frac{aa}{cc}$, cioè $aa + bb - \frac{aaxx}{cc} = yy - 2ay + aa$, ch' è lo ſteſſo, che $yy - 2ay + \frac{aaxx}{cc} - bb = 0$: il che &c.



PRO-

PROBLEMA II.

25. Sia l'Equazione $yy + by + \frac{bxx}{c} - ax = 0$; trasportando, ed aggiugnendo all'una, e all'altra parte $\frac{bb}{4}$, sarà $yy + by + \frac{bb}{4} = ax - \frac{bxx}{c} + \frac{bb}{4}$: si faccia $y + \frac{b}{2} = z$, avremo $zz = ax - \frac{bxx}{c} + \frac{bb}{4}$, cioè $\frac{bc}{4} - \frac{czz}{b} = xx - \frac{acx}{b}$; e compiendo il quadrato nell' omogeneo di comparazione, sarà $\frac{bc}{4} + \frac{aacc}{4bb} - \frac{czz}{b} = xx - \frac{acx}{b} + \frac{aacc}{4bb}$; e facendo $x - \frac{ac}{2b} = u$, si avrà finalmente $\frac{\sqrt[3]{bc + aacc}}{4bb} - uu = \frac{czz}{b}$; $\frac{\sqrt[3]{(bc + aacc)}}{2b}$ = al Semidiametro trasverso; il conjugato intero $= \sqrt{(\frac{\sqrt[3]{b^3 + aac}}{b})}$ (num° 22.). Col centro A;

TAV. III. Fig. 21.

Diametro trasverso $= \frac{\sqrt[3]{(bc + aacc)}}{b} =$ CB, e Conjugato $= \sqrt{(\frac{\sqrt[3]{b^3 + aac}}{b})}$, si descriva la Ellissi CEBD; si tiri la Ordinata GF, sarà essa $= z$, AG $= u$; si prenda AH $= \frac{ac}{2b}$

$\frac{ac}{2b}$; si conducano HM $= \frac{b}{2}$, ed MN, una parallela a GF, l'altra ad HG, sarà in M l'origine delle x positive verso N, negative verso O, e le NF saranno le y, la superiore positiva, la inferiore negativa. Per proprietà poi della Curva abbiamo $\overline{AB}^2 - \overline{AG}^2 = \overline{GF}^2 = \frac{bc + aacc}{bb} : \frac{b^3 + aac}{b} = 1 : \frac{b}{c}$; ma $\overline{AB}^2 = \frac{b^3c + aacc}{4bb}$; $\overline{AG}^2 = xx - \frac{acx}{b} + \frac{aacc}{4bb}$; $\overline{GF}^2 = yy + by + \frac{bb}{4}$: dunque $\frac{b^3c + aacc}{4bb} - xx + \frac{acx}{b} - \frac{aacc}{4bb} : yy + by + \frac{bb}{4} = 1 : \frac{b}{c}$, cioè $\frac{bb}{4} - \frac{bxx}{c} + ax = yy + by + \frac{bb}{4}$; che ci dà finalmente $yy + by + \frac{bxx}{c} - ax = 0$: il che &c.

PROBLEMA III.

26. VOgliasi costruire l'Equazione $yy + 2ay + xx - cx - aa = 0$, cioè $yy + 2ay = aa + cx - xx$, e sia l'angolo delle Coordinate x, y retto; essa ci dà $yy + 2ay + aa = 2aa + cx - xx$: si ponga $y + a = z$, sarà $zz = 2aa + cx - xx$, cioè $2aa + \frac{cc}{4} - zz =$

$xx - cx + \frac{cc}{4}$; si faccia $x - \frac{c}{2} = u$, avrassi $2aa + \frac{cc}{4} - uu = zz$. Quì si vede ad un tratto, che tanto il Diametro trasverso, come il conjugato è $= 2\sqrt{(2aa + \frac{cc}{4})}$; essendo l' analogia per il Conjugato $1 : 1 = 2aa + \frac{cc}{4} : 2aa + \frac{cc}{4}$: onde $\sqrt{(2aa + \frac{cc}{4})}$ = Semidiametro conjugato, quindi l' Equazione al Circolo; essendosi supposto anche da prima l'angolo delle Coordinate x, y retto (num. 23.). Col centro A, Diametro CB = $2\sqrt{(2aa + \frac{cc}{4})}$ si descriva il Cerchio CEBD; e tirata l'Ordinata FG, che sarà $= z$ stante l' Equazione ridotta, e AF $= u$; si pigli nel Diametro CB, AH $= \frac{c}{2}$, e condotte HL $= a$, e LM, l' una parallela a FG, l' altra a FH, sarà in L l'origine delle x positive verso M, negative verso la parte opposta; e le MG le y, la superiore positiva, la inferiore negativa; imperocchè LM = HF $= u + \frac{c}{2} = x$, MG $= z - a = y$; ed il Cerchio descritto sarà il luogo dell' Equazione proposta: poichè abbiamo $\overline{AB}^2 - \overline{AF}^2 = \overline{FG}^2$, cioè $2aa + \frac{cc}{4} - xx + cx - \frac{cc}{4} = yy + 2ay + aa$; ch' è lo stesso,

TAV. III. Fig. 22.

che-

che $yy + 2ay + xx - cx - aa = 0$; il che &c.

PROBLEMA IV.

27. Dasi da costruire la Equazione $yy + \frac{bxy}{a} + \frac{bbxx}{aa} - cy = 0$, cioè $yy + \frac{bxy}{a} = cy - \frac{bbxx}{aa}$; e compiendo il quadrato nel primo membro, sarà $yy + \frac{bxy}{a} + \frac{bbxx}{4aa} = cy - \frac{3bbxx}{4aa}$; e fatta la sostituzione di $y + \frac{bx}{2a} = z$, avremo $zz = cy - \frac{3bbxx}{4aa}$; e facendo sparire la y (num. 16.) sostituendo il di lei valore $y = z - \frac{bx}{2a}$, sarà $zz = cz - \frac{3bbxx}{4aa} - \frac{bcx}{2a}$, cioè $zz - cz + \frac{cc}{4} = \frac{cc}{4} - \frac{3bxx}{4aa} - \frac{bcx}{2a}$; e facendo $z - \frac{c}{2} = p$, si avrà $pp = \frac{cc}{4} - \frac{3bbxx}{4aa} - \frac{bcx}{2a}$, o sia $\frac{aacc}{3bb} - \frac{4aapp}{3bb} = xx + \frac{2acx}{3b}$; e compiendo il quadrato nell' omogeneo di comparazione $\frac{4aacc}{9bb} - \frac{4aapp}{3bb} = xx + \frac{2acx}{3b} + \frac{aacc}{9bb}$; e fatta finalmente $x + \frac{ac}{3b} = q$, sarà $\frac{4aapp}{3bb} = \frac{4aacc}{9bb} - qq$. Sulla retta AG si descriva TAV. III. fig. 23.

il triangolo ABE, co i lati $AB = 2a$, $BE = b$, e si chiami al solito la nota $AE = f$, e l'angolo ABE sia uguale al complemento a due retti dell' angolo delle Coordinate x, y. Si prolunghi AB indefinitamente, nella quale presa $AP = x$, e tirata PG parallela a BE, sarà $PG = \frac{bx}{2a}$, e $AG = \frac{fx}{2a}$: nel punto A si alzi $AD = \frac{c}{2}$, e parallela a PG, essendosi fatta la sostituzione di $z - \frac{c}{2} = p$; e prolungate le AP, AG dalla parte opposta, si prenda $AR = \frac{ac}{3b}$, e condotte KK, RN, l'una parallela a MG, l'altra a PG, sarà $ND = AM = \frac{cf}{6b}$ per la similitudine de' triangoli ABE, AMR, quindi $NO = MG = MA + AG = \frac{cf}{6b} + \frac{fx}{2a}$. Col centro N, Diametro trasverso $KK = \frac{2cf}{3b}$, conjugato $= \frac{2c}{\sqrt{3}}$ si descriva la Ellissi KZK, sarà essa il luogo dell' Equazione proposta, essendosi presa $AP = x$, e corrispondendo ad essa due Ordinate PZ, PZ, tutte $= y$, la superiore positiva, la inferiore negativa; imperocchè $OZ = p$, $OG = \frac{c}{2}$, dunque $ZG = p + \frac{c}{2} = z$: ma $PG = \frac{bx}{2a}$, dunque $PZ = z - \frac{bx}{2a} = y$. Che se si prendano le Assisse x negative tra' punti A, Q, corrisponderanno me-

medeſimamente alle ſteſſe due Ordinate y, poſitiva una, negativa l'altra: preſe $= AQ$ corriſponderà una ſola Ordinata y poſitiva; e preſe $> AQ$, ma tra' punti Q, Φ, ne corriſponderanno due, tutte e due poſitive.

La regola poi di trovare sì il Diametro traſverſo, che il conjugato, è la ſeguente: quanto al primo, ſi faccia, come il denominatore della frazione che moltiplica la incognita x nella prima ſoſtituzione, alla nota f del triangolo ABE; così il Diametro traſverſo dell'Equazione ridotta, al quarto: queſta quarta linea proporzionale ſarà coſtantemente il Diametro traſverſo: riſpetto al conjugato, ſi uſi la regola data al num. 22. L'analogia adunque per il Diametro traſverſo è queſta, $2a : f = \frac{4ac}{3b} : \frac{2cf}{3b}$ = al Diametro traſverſo; come ſi prova ancora dalla proprietà della Curva; imperocchè $\overline{NK}^2 - \overline{NO}^2 : \overline{OZ}^2 = \overline{NK}^2 : \frac{cc}{3}$; ma $\overline{NK}^2 = \frac{ccff}{9bb}$, $\overline{NO}^2 = \overline{MG}^2 = \overline{MA + AG}^2 = \frac{ccff}{36bb} + \frac{cffx}{6ab} + \frac{ffxx}{4aa}$; $\overline{OZ}^2 = pp = \left(z - \frac{c}{2}\right)^2 = \left(y + \frac{bx}{2a} - \frac{c}{2}\right)^2 = yy + \frac{bxy}{a} + \frac{bbxx}{4aa} - cy - \frac{bcx}{2a} + \frac{cc}{4}$; quindi ſoſtituendo queſti valori ſarà $\frac{ccff}{9bb} - \frac{ccff}{36bb} - \frac{cffx}{6ab} - \frac{ffxx}{4aa} :$

$yy + \frac{bxy}{a} + \frac{bbxx}{4aa} - cy - \frac{bcx}{2a} + \frac{cc}{4} = \frac{ceff}{9bb}$: $\frac{cc}{3} = 1 : \frac{3bb}{ff}$; e moltiplicando eſtremi, e medj, e riducendo, ſi trova la Equazione propoſta da coſtruirſi.

28. Ora per dimoſtrare ciò, che abbiamo detto alla fine del num. 8., biſogna notare, che oltre la proprietà da noi conſiderata nell'Elliſſi al num. 5., ella ne gode un'altra; ed è, che il rettangolo medeſimo de' ſegmenti del Diametro è al corriſpondente quadrato dell'Ordinata, come l'Aſſe, o Diametro traſverſo è al Parametro. Ritenute adunque le ſteſſe denominazioni del numero citato (*Fig. anco dello ſteſſo*) e chiamato il Parametro $= p$, ſarà l'analogia $aa - xx : yy = 2a : p$; quindi l'Equazione $aa - xx = \frac{2ayy}{p}$; dove ſi vede che la radice quadrata del termine coſtante è il Semiaſſe, o Semidiametro traſverſo: e ſe il numeratore della frazione che moltiplica il quadrato dell'Ordinata è $=$ al doppio di eſſa radice, il denominatore di tal frazione ſarà $=$ al Parametro: ma quando l'Equazione non abbia una tal condizione, il modo di trovare il Parametro è di fare, come il numeratore della frazione che moltiplica il quadrato dell'Ordinata, è al ſuo denominatore; così il doppio della radice del termine coſtante, al quarto: queſto quarto termine della proporzione ſarà il Parametro; come per eſempio ſe foſſe l'Equazione $bb - xx = \frac{ccyy}{2ff}$, per lo Parametro ſi faccia $cc : 2ff =$

$2b : \frac{4bff}{cc}$; ſarà dunque il Parametro $= \frac{4bff}{cc}$. Ed infatti deve eſſere per proprietà della Curva $bb - xx : yy = 2b : \frac{4bff}{cc} = cc : 2ff$, e però $bb - xx = \frac{ccyy}{2ff}$. Ciò poſto: nell' Equazione coſtruita in queſto Problema, e nell' altre che hanno il piano xy, eſſendoci noi ſerviti delli Diametri, due analogie furono iſtituite, una per lo Diametro traſverſo, l'altra pe'l conjugato: ma volendola riferita (parlando già dell' Equazione finale) al Diametro, e Parametro corriſpondente, tre è d'uopo farne, una già al ſolito per lo Diametro traſverſo, e due per lo Parametro: imperocchè biſogna prima trovare il Parametro dell' Equazione finale colla regola ora da noi addotta; indi ſi deve fare, come la nota linea f del triangolo ABE, al denominatore della frazione che moltiplica l'incognita ſecondo la quale non è ordinata l' Equazione nella prima ſoſtituzione, cioè $2a$, parlando già del preſente Problema; così il Parametro dell' Equazione finale ritrovato, al quarto: queſto quarto termine ſarà ſempre il Parametro, che dovrà ſervire per la coſtruzione dell' Equazione propoſta: ed ecco le tre analogie. Dunque il metodo di ſervirſi degli Aſſi, o Diametri è più breve, e più ſemplice di quello degli Aſſi, o Diametri, e del Parametro corriſpondente: oltre di che ſi toglie a' principianti la pena di riflettere all'aſpetto del Equazione finale; ed è più facile il tenerſi a memoria quello, che queſto.

PRO-

PROBLEMA V.

29. SIA da costruirsi la Equazione $yy + \frac{2bxy}{a} + xx - ax = o$, e sia $\frac{bb}{aa} < 1$, cioè $b < a$, sarà, compiendo il quadrato, $yy + \frac{2bxy}{a} + \frac{bbxx}{aa} = \frac{bbxx}{aa} - xx + ax$; e fatta la sostituzione di $y + \frac{bx}{a} = z$, avremo $zz = \frac{bbxx - aaxx}{aa} + ax$, cioè, ponendo per brevità $\frac{bb - aa}{aa} = -\frac{mm}{nn}$, $zz = ax - \frac{mmxx}{nn}$, ossia $-\frac{nnzz}{mm} = xx - \frac{annx}{mm}$; e compiendo il quadrato $\frac{aa.u^4}{4m^4} - \frac{nnzz}{mm} = xx - \frac{annx}{mm} + \frac{aan^4}{4m^4}$, e facendo $x - \frac{ann}{2mm} = u$, sarà $\frac{aan^4}{4m^4} - uu = \frac{nnzz}{mm}$. Sia l'angolo delle Ordinate retto: per avere il Diametro trasverso, si faccia $a : f = \frac{ann}{2mm} : \frac{fnn}{2mm}$ = al Semidiametro trasverso (num. 27.); per il conjugato $nn : mm = \frac{aan^4}{4m^4} : \frac{aann}{4mm}$: dunque $\frac{an}{2m}$

$\frac{an}{2m}$ = al Semidiametro conjugato (num. 22.). Sulla retta AP ſi deſcriva il triangolo ABC coi lati AB = a, BC = b, e ſia l'angolo ACB retto; è chiaro che la nota linea f ſarà = $\sqrt{aa - bb}$; ſoſtituito adunque un tal valore nell'eſpreſſione ritrovata del Semidiametro traſverſo in luogo di f, e poſto pure il valore di $\frac{nn}{mm} = \frac{aa}{aa - bb}$, ſarà $\frac{fnn}{2mm} = \frac{\frac{aa}{2\sqrt{(aa - bb)}}}{}$: ma fatta anche la ſoſtituzione del valore di $\frac{n}{m} = \frac{a}{\sqrt{(aa - bb)}}$ nell'eſpreſſione del Semidametro conjugato, ſarà $\frac{an}{2m} = \frac{aa}{2\sqrt{(aa - bb)}}$; dunque il Diametro traſverſo ſarà uguale al Diametro conjugato, e però l'Elliſſi paſſa ad eſſere un Circolo. Si prolunghino pertanto AB, AC indefinitamente; e preſa AG = x, e condotta DG parallela a BC, ſarà DG = $\frac{bx}{a}$, e AD = $\frac{fx}{a}$: dalla AG ſi tagli AE = $\frac{annn}{2mm}$, ſarà EG = $x - \frac{annn}{2mm} = u$; e per la ſomiglianza de' triangoli ABC, LMD (condotta già LM parallela ad EG) ſarà LD = $\frac{fx}{a} - \frac{fnn}{2mm}$ = $\frac{fu}{a}$: tirata per fine LE parallela a BC, col centro L, Semidiametro AL = $\frac{fnn}{2mm}$, che tale è ancora per la ſimilitudine de' triangoli ABC, AEL, ſi deſcriva il Circolo AHPH, nel quale prolungata

TAV. III. Fig. 24.

ta dall'una, e l'altra parte fino alla periferia la DG, ſaranno le GH le y, la ſuperiore poſitiva, la inferiore negativa, e alle x sì poſitive, e sì negative, che però non giungano alla Curva, o vadano fuori di eſſa, corriſponderanno due Ordinate y, una poſitiva, l'altra negativa; eſſendo GH ſuperiore $=$ DH $-$ DG $= z - \frac{bx}{a} = y$, la GH inferiore $=$ DH $+$ DG $= \frac{bx}{a} - z = -y$. Preſe poi le $x =$ EO, corriſponderà ad eſſe una ſola Ordinata OH $= -y$ negativa; preſe poi $>$ EO, ma $<$ EZ, corriſponderanno due Ordinate, tutte due negative; quindi il Circolo così deſcritto ſarà il luogo dell' Equazione propoſta. Il che anco ſi prova dalla proprietà della Curva; imperocchè nel Circolo, $\overline{LP}^2 - \overline{LD}^2 = \overline{DH}^2$, $= zz = \left(y + \frac{bx}{a}\right)^2$; ma $\overline{LP}^2 = \frac{ffn^4}{4m^4} = \frac{a^4 ff}{4.(aa-bb)^2}$, $\overline{LD}^2 = \left(\frac{fx}{a} - \frac{fnn}{2mm}\right)^2 = \left(\frac{fx}{a} - \frac{aaf}{2.(aa-bb)}\right)^2$, $\overline{DH}^2 = yy + \frac{2bxy}{a} + \frac{bbxx}{aa}$; dunque $\frac{a^4 ff}{4.(aa-bb)^2} - \frac{ffxx}{aa} + \frac{affx}{aa-bb} - \frac{a^4 ff}{4.(aa-bb)^2} = yy + \frac{2bxy}{a} + \frac{bbxx}{aa}$; e ſoſtituendo il valore di $ff = aa - bb$, avremo $\frac{bbxx - aaxx}{aa} + ax = yy + \frac{2bxy}{a}$

+

$+ \frac{bbxx}{aa}$, cioè finalmente $yy + \frac{2bxy}{a} + xx - ax = 0$: il che &c.

PROBLEMA VI.

30. *Data di posizione la retta indefinita AP, con un punto fuori di essa C, si cerca il luogo di tutti i punti M tali, da' quali avendo condotte due rette MC, MP, l'una al dato punto C, l'altra perpendicolare ad AP, sia sempre PM = 2CM.* TAV. III. Fig. 25.

SI tiri la AC parallela a PM, e GM parallela ad AP; si chiami $AC = c$, $AP = x$, $PM = y$, sarà $CG = c - y$, e $CM = \sqrt{(cc - 2cy + yy + xx)}$, e perciò avremo per la condizione del Problema, $y = 2\sqrt{(cc - 2cy + yy + xx)}$; e quadrando, $yy = 4cc - 8cy + 4yy + 4xx$, cioè $3yy - 8cy + 4xx + 4cc = 0$, e dividendo per 3, $yy - \frac{8cy + 4xx + 4cc}{3} = 0$; trasportando i termini sarà $yy - \frac{8cy}{3} = -\frac{4cc - 4xx}{3}$, e compiendo il quadrato nel primo membro, $yy - \frac{8cy}{3} + \frac{16cc}{9} = \frac{4cc}{9} - \frac{4xx}{3}$; si faccia la sostituzione di $y - \frac{4c}{3} = z$, sarà $zz = \frac{4cc}{9} - \frac{4xx}{3}$, ch' è lo stesso, che $\frac{3zz}{4} = \frac{cc}{3} - xx$: il Semiasse trasverso è $= \frac{c}{\sqrt{3}}$, il conjugato $= \frac{2c}{3}$ (num. 22.).

Si prenda $AE = \frac{4c}{3}$, indi condotta NH parallela ad AP, preſe ſu di eſſa le parti NE, EH ciaſcheduna $= \frac{c}{\sqrt{3}}$, con queſto Semiaſſe traſverſo, e col conjugato ritrovato $= \frac{2c}{3}$ ſi deſcriva l'Elliſſi NOHB, ſarà eſſa il luogo di tutti i punti cercati; imperocchè prolungata PM in F, ſarà $\overline{EH}^2 - \overline{EF}^2 : \overline{FM}^2 = \frac{cc}{3} : \frac{4cc}{9} = \frac{3}{4} : 1$; ma $\overline{EH}^2 = \frac{cc}{3}$, $\overline{EF}^2 = xx$, $\overline{FM}^2 = \frac{16cc}{9} - \frac{8cy}{3} + yy$; dunque avraſſi $\frac{cc}{3} - xx : \frac{16cc}{9} - \frac{8cy}{3} + yy = \frac{3}{4} : 1 = 1 : \frac{4}{3}$; e però l'Equazione $yy - \frac{8cy}{3} + \frac{16cc}{9} = \frac{4cc}{9} - \frac{4xx}{3}$, e riducendo, $yy - \frac{8cy + 4xx + 4cc}{3} = 0$: Equazione ritrovata.

COROLLARIO I.

31. E' Chiaro dalla coſtruzione della figura, che all'Aſſiſſe $AP = x$ sì poſitive, che negative corriſpondono ſempre due Ordinate y, tutte due poſitive, l'una, che va alla conveſſità, l'altra alla concavità della Curva, quando però ſi prendano le x tra' punti A, Q.

Co-

COROLLARIO II.

32. Poichè $OE = BE = \frac{2c}{3}$, è $CE = \frac{4c}{3} - c = \frac{c}{3}$, sarà $OC = OE + CE = \frac{2c+c}{3} = c$, e $CB = BE - CE = \frac{2c-c}{3} = \frac{c}{3}$; quindi $OC \cdot CB = \frac{cc}{3} = \overline{EH}^2$, e però il punto C sarà uno de' fuochi dell' Ellissi per una nota proprietà di tal Curva; e presa sull' Asse OB la OL = BC, sarà il punto L l'altro fuoco.

PRO-

PROBLEMA VII.

33. *Dividere una data retta M N in tre parti continuamente proporzionali.*

TAV. III. *Fig.* 26. Sia M N $= a$, la prima parte $= x$, la seconda $= y$, sarà la terza $= \frac{yy}{x}$, e per la condizione del problema si avrà $x + y + \frac{yy}{x} = a$, cioè $yy + xy + xx - ax = 0$; la quale Equazione, facendo noi l'angolo dell'Ordinate al Diametro della figura da descriversi retto, è al Circolo (num. 23.); trasportando dunque i termini, e compiendo il quadrato nel primo membro dell'Equazione, sarà $yy + xy + \frac{xx}{4} = ax - \frac{3xx}{4}$; e facendo $y + \frac{x}{2} = z$, avremo $zz = ax - \frac{3xx}{4}$, cioè $-\frac{4zz}{3} = xx - \frac{4ax}{3}$; e compiendo il quadrato nel secondo membro, $\frac{4aa}{9} - \frac{4zz}{3} = xx - \frac{4ax}{3} + \frac{4aa}{9}$, e fatta $x - \frac{2a}{3} = u$, sarà $\frac{4aa}{9} - uu = \frac{4zz}{3}$. Sulla retta A A si descriva il triangolo A B C coi lati A B $= 2$, B C $= 1$, e sia retto l'angolo A C B, sarà A C $= \sqrt{3}$. Si prolunghi A Q indefinitamente, e tirata Q P parallela a B C, si produca fino alla periferia la stessa Q P: indi condotte F D, F N, la prima parallela a B C, l'altra a D Q, e tagliata fuori dalla A Q,

A D

$AD = \frac{2a}{3}$, ſarà (determinata prima $AQ = x$) $DQ = FN = x - \frac{2a}{3} = u$; $AP = \frac{x\sqrt{3}}{2}$, $QP = \frac{x}{2}$, $AF = \frac{a}{\sqrt{3}}$, e però $FP = \frac{x\sqrt{3}}{2} - \frac{a}{\sqrt{3}}$. Col raggio adunque $= \frac{a}{\sqrt{3}}$ ſi deſcriva il Circolo AMAS, ſarà eſſo il luogo dell'Equazione di ſopra ritrovata: eſſendo $PM = z$ ſtante l'Equazione finale; ma $PQ = \frac{x}{2}$, dunque $QM = z - \frac{x}{2} = y$, e le DQ, QM le Coordinate dell'Equazione. Ciò anche ſi prova dalla proprietà della Curva; imperocchè $\overline{AF}^2 - \overline{FP}^2 = \overline{PM}^2$; ma $\overline{AF}^2 = \frac{aa}{3}$, $\overline{FP}^2 = \left(\frac{x\sqrt{3}}{2} - \frac{a}{\sqrt{3}}\right)^2 = \frac{3xx}{4} - ax + \frac{aa}{3}$, $\overline{PM}^2 = \left(y + \frac{x}{2}\right)^2$, dunque $\frac{aa}{3} - \frac{3xx}{4} + ax - \frac{aa}{3} = yy + xy + \frac{xx}{4}$, cioè $yy + xy + xx - ax = o$.

Riſpetto poi alla corriſpondenza delle Ordinate y alle Aſſiſſe x sì poſitive, come negative, ſi facciano le ſteſſe conſiderazioni del num. 29.; giacchè il caſo è il medeſimo.

Chi però voleſſe vedere uſata la regola da noi inſegnata al num. 27. per ritrovare tanto il Diametro traſverſo, che il conjugato, onde meglio comprendere ſe l'Equazione ſia al Circolo, eccola: per lo Diametro

metro traſverſo ſi faccia $2 : \sqrt{3} = \frac{2a}{3} : \frac{a}{\sqrt{3}}$ = Semidiametro traſverſo: pe'l conjugato $4 : 3 = \frac{4aa}{9} : \frac{aa}{3}$, e però $\frac{a}{\sqrt{3}}$ = Semidiametro conjugato; quindi l'Equazione al Circolo (num. 23.).

CAPO TERZO.

Dell' Equazioni all' Iperbola, o Iperbole oppoſte.

34. L'Equazioni ſempliciſſime all' Iperbola, o Iperbole oppoſte ſono $\frac{aayy}{cc} = xx - aa$; $\frac{ccyy}{aa} = xx + cc$, la prima per il Diametro primario, l'altra per il ſecondario; nelle quali ſi vede chiaramente, che la radice quadrata del termine coſtante è = al Semiaſſe, o Semidiametro traſverſo; e ſe il numeratore della frazione, che moltiplica il quadrato dell'Ordinata è tale, che il di lei numeratore ſia = al termine coſtante diviſo per una qualunque quantità data, la radice di tal diviſore ſarà = al Semiaſſe, o Semidiametro conjugato: ma quando l'Equazione non abbia queſta condizione, per ritrovare il Diametro conjugato ſi faccia ciò, che s'è detto, e fatto riſpetto all'Elliſſi nel num. 22., ſenza ripetere le medeſime coſe, che ſono troppo evidenti. Ciò però s'intenda di quelle Equazioni finali proveniena-

nienti da quelle primarie, dove non entra il rettangolo xy; le quali perchè ſiano all'Iperbola, biſogna che il quadrato dell'incognita, per cui viene ordinata l'Equazione, ſia libero da frazione, e col ſegno poſitivo, l'altro ſia affetto dal negativo, come ſe foſſe

$$yy - 2ay - \frac{aaxx}{2bb} + bx - aa = 0.$$

Quanto poi all'altre Equazioni provenienti da quelle, in cui ci cade il rettangolo xy; le quali perchè ſiano all'Iperbola, è d'uopo che i quadrati delle incognite ſiano tutti due affetti del ſegno poſitivo; che quello, ſecondo il quale è ordinata l'Equazione, ſia libero da frazione; l'altro poi l'abbia tale, che ſia minore del quadrato della metà della frazione che moltiplica il piano xy; o ſia, ch'è lo ſteſſo, che il quadrato della metà della frazione che moltiplica il piano xy, ſia maggiore della frazione che moltiplica il quadrato dell'incognita, ſecondo la quale non è ordinata l'Equazione; come ſe l'Equazione foſſe $yy - \frac{2bxy}{a} + \frac{bbxx}{2aa} - 2ax + cc = 0$. In quanto poi all'Equazioni finali provenienti da queſte, il modo di trovare tanto il Diametro traſverſo, che il conjugato, è lo ſteſſo che quello da noi uſato per l'Elliſſi al num. 27.; nè occorre trattenerſi di nuovo ſu quello che altre volte ſi è dichiarato.

PROBLEMA I.

35. DEbbasi costruire l'Equazione $yy - 2cy - \frac{aaxx}{bb} + aa = 0$, o sia $yy - 2cy = \frac{aaxx}{bb} - aa$; si compisca il quadrato nel primo membro, ed avrassi $yy - 2cy + cc = \frac{aaxx}{bb} + cc - aa$; e facendo $y - c = z$, sarà (ponendosi $a > c$, e per brevità $cc - aa = -mm$) $zz = \frac{aaxx}{bb} - mm$, o sia $\frac{bbzz}{aa} = xx - \frac{bbmm}{aa}$: il Semidiametro trasverso è $= \frac{bm}{a}$, il conjugato intero $= 2m$ (num. 22). Col diametro adunque trasverso $AB = \frac{2bm}{a}$, col conjugato $= 2m$, si descrivano le due Iperbole opposte eguali FAG, LBN, saranno in esse le HG, MN, HF, LM le z, e le CM, CH le x. Si prenda $CO = c$ parallela alle Ordinate, e si conduca OP parallela al Diametro trasverso, sarà in O l'origine delle x, che si fissano positive all'ingiù, e negative all'insù. A queste Assisse poi sì positive, che negative, prese maggiori di OQ, corrisponderanno sempre quattro Ordinate y, due positive, e due negative, cioè PG, PN saranno le positive; FP, LP le negative: prese poi le $x = OQ$, corrisponderanno ad esse due Ordinate y tutte due positive; prese le x tra' punti T, Q, ne risulteranno quattro y, tutte positive,

TAV. III. Fig. 27.

ve, due che vanno alla conveſſità, l'altre due alla concavità della Curva: infatti noi abbiamo $MN = HG = z$; ma $PM = PH = c$, dunque $PN = PG = z + c = y$: al contrario $LM = FH = -z$; dunque $LP = FP = -z - c = -y$; $QN = QG = z + c = y$; e così ſi diſcorra delle altre. La proprietà della Curva ci dà $\overline{CM}^2 - \overline{CB}^2 : \overline{MN}^2 = \frac{4bbmm}{aa} : 4mm$; ma $\overline{CM}^2 = xx$, $\overline{CB}^2 = \frac{bbmm}{aa}$, $\overline{MN}^2 = yy - 2cy + cc$; dunque $xx - \frac{bbmm}{aa} : yy - 2cy + cc = \frac{4bbmm}{aa} : 4mm = 1 : \frac{aa}{bb}$; quindi l'Equazione $\frac{aaxx}{bb} - mm = yy - 2cy + cc$: ma ſi è fatto $cc - aa = -mm$; dunque ſoſtituendo, ſi avrà finalmente $yy - 2cy - \frac{aaxx}{bb} + aa = o$: il che ec.

PROBLEMA II.

36. Sia data da coſtruire l'Equazione $yy + 2ay - \frac{axx}{2b} - cx = o$; traſportando i termini, e compiendo il quadrato, avremo $yy + 2ay + aa = aa + cx + \frac{axx}{2b}$; e fatta la ſoſtituzione di $y + a = z$, ſarà $zz = aa + cx + \frac{axx}{2b}$, o ſia $\frac{2bzz}{a} - 2ab = xx + \frac{2bcx}{a}$; e compiendo il quadrato nell' omogeneo di comparazione $\frac{2bzz}{a} + \frac{bbcc}{aa} - 2ab = xx + \frac{2bcx}{a} + \frac{bbcc}{aa}$; e fatta la ſoſtituzione di $x + \frac{bc}{a} = u$, e per brevità facendo $\frac{bbcc}{aa} - 2ab = mm$, avremo finalmente $\frac{2bzz}{a} = uu - mm$: quì il Diametro traſverſo è $= 2m$; il conjugato è $= 2m\sqrt{\frac{a}{2b}}$ (num. 34.). Con queſti due Diametri adunque ſi deſcrivano le Iperbole eguali oppoſte FBE, HBM, ſaranno in eſſe le FD, DE, HG, GM le z, e le AG, AD le u, una poſitiva, l'altra negativa, atteſa l'Equazione ridotta: ma per la prima ſoſtituzione abbiamo $y = z - a$; dunque preſa AP $= a$ parallela alle Ordinate, e condotta per lo punto P la parallela QQ al Diametro BB, ſaranno le HQ, FQ le y poſitive, e le QM, QE le y negative: ma per l'al-

TAV. III. Fig. 28.

l'altra ſoſtituzione ſi ha pure $x = u - \frac{bc}{a}$; quindi preſa $PS = \frac{bc}{a}$, ſaranno le SQ, SQ le x, le inferiori poſitive, le ſuperiori negative. Alle x pertanto poſitive, e negative maggiori di SL, corriſponderanno ſempre due Ordinate y, una poſitiva, l'altra negativa: alle x poi negative, preſe minori di SX, corriſponderanno due Ordinate y tutte due negative: lo ſteſſo ſi diſcorra dell'altra Iperbola oppoſta HBM. E che ciò ſia vero, noi abbiamo $FQ = HQ = z - a = y$, $QE = QM = -z + a = -y$; lo ſteſſo ſi dica dell'altre Ordinate; SQ inferiore $= u - \frac{bc}{a} = x$; SQ ſuperiore $= \frac{bc}{a} - u = -x$. La proprietà della Curva eſige che $\overline{AD}^2 - \overline{AB}^2 : \overline{FD}^2 = 4mm : \frac{4amm}{2b} = 1 : \frac{a}{2b}$; ma $\overline{AD}^2 = xx + \frac{2bcx}{a} + \frac{bbcc}{aa}$, $\overline{AB}^2 = mm$, $\overline{FD}^2 = yy + 2ay + aa$; dunque $xx + \frac{2bcx}{a} + \frac{bbcc}{aa} - mm : yy + 2ay + aa = 1 : \frac{a}{2b}$, e però l'Equazione $\frac{axx}{2b} + cx + \frac{bcc}{2a} - \frac{amm}{2b} = yy + 2ay + aa$; e ſoſtituito il valore di $mm = \frac{bbcc}{aa} - 2ab$, ſi avrà $\frac{axx}{2b} + cx + aa = yy + 2ay + aa$, ch'è lo ſteſſo che $yy + 2ay - \frac{axx}{2b} - cx = 0$.

Se

Se foſſe ſtata la quantità $\frac{bbcc}{aa} < 2ab$; in tal caſo $\frac{bbcc}{aa} - 2ab = -mm$, e però la finale Equazione $\frac{2bzz}{a} = uu + mm$; che è al ſecondo Dia-

TAV. III. *Fig. 29.* metro. Cogli ſteſſi due Diametri ME, BI, l'uno come ſecondario, l'altro primario ſi deſcrivano le due eguali Iperbole oppoſte GEA, DML, preſa una qualunque Aſſiſſa HN $= u$, le corriſpondenti Ordinate ND, NL ſaranno le z poſitive, e negative, atteſa l'Equazione ridotta. Condotta per il punto P una parallela QPQ al Diametro EM, preſa però prima HP $= a$; indi tagliata fuori PS $= \frac{bc}{a}$, ſarà SQ a deſtra $= u - \frac{bc}{a} = x$ poſitiva, e SQ a ſiniſtra $= \frac{bc}{a} - u = -x$ negativa. Si avrà perciò nel punto S l'origine delle x, alle quali preſe sì poſitive, che negative, maggiori di SO, ma minori di ST, corriſponderanno quattro Ordinate y tutte negative; preſe poi sì poſitive, che negative $=$ ST, lor corriſponderanno due Ordinate negative; preſe finalmente maggiori di ST, ne corriſponderanno ancora quattro, due ſuperiori negative, due inferiori poſitive; imperocchè abbiamo QD $=$ QA $= z - a = y$, QL $=$ QG $= a - z = -y$, e così ſi diſcorra delle altre. Quì abbiamo per proprietà della Curva $\overline{HN}^2 + \overline{HM}^2 : \overline{ND}^2 = \overline{ME}^2 : \overline{BI}^2$ (num. 6., e 34.); e ſoſtituendo i valori analitici $uu +$

mm:

$mm : zz = 4mm : \frac{4amm}{2b} = 1 : \frac{a}{2b}$, e mettendo i valori di $mm = 2ab - \frac{bbcc}{aa}$, di $uu = (x + \frac{bc}{a})^2$, di $zz = (y + a)^2$, moltiplicando eſtremi, e medj, riſulterà ancora la Equazione propoſta da coſtruirſi.

PROBLEMA III.

37. ABbiaſi a coſtruire la Equazione $yy - 2cy - xx + 2bx = 0$, cioè $yy - 2cy = xx - 2bx$; e compiendo il quadrato nel primo membro $yy - 2cy + cc = xx - 2bx + cc$, e facendo $y - c = z$, avremo $zz = xx - 2bx + cc$, ovvero $zz - cc = xx - 2bx$; e compiendo il quadrato nell'omogeneo di comparazione, $zz + bb - cc = xx - 2bx + bb$; e fatta la ſoſtituzione di $x - b = u$, e ponendo per brevità $bb - cc = mm$, ſi avrà $zz = uu - mm$. Quì ſi vede ad un tratto, che l'Equazione è all'Iperbola equilatera: imperocchè il Diametro traſverſo è $= 2m = 2\sqrt{(bb - cc)}$, e l'analogia pe'l conjugato è, (num. 22., 34.) $1 : 1 = mm : mm$; e però $2m = 2\sqrt{(bb - cc)}$ = al Diametro conjugato = al Diametro traſverſo, quindi l'Iperbola è equilatera (num. 6.). Col Diametro traſverſo AF = al conjugato $= 2\sqrt{(bb - cc)}$, ſi deſcrivano le due Iperbole oppoſte eguali CAD, GFI; preſa una qualunque Aſſiſſa EB poſitiva $= u$, e EH negativa $= -u$, le corriſpondenti Ordinate ſaranno le z poſitive, e negative, atteſa l'Equazione finale; ma per la prima ſo- TAV. III. Fig. 30.

ſoſtituzione abbiamo $y - c = z$; quindi preſa MB $= c$, EK $= b$, e condotta LM parallela al Diametro AF, prolungata da una e l'altra parte, ſarà LM inferiore $= u + b = x$ poſitiva, LM ſuperiore $=$ EH $-$ EK $= -u - b = -x$ negativa: ſarà dunque nel punto L l'origine delle x, le poſitive tirate all ingiù, le negative all'insù. A tali Aſſiſſe adunque poſitive maggiori di LO, ma minori di LN, corriſponderanno due Ordinate y tutte due poſitive, l'una che termina alla conveſſità, l'altra alla concavità della Curva; preſe le $x =$ LN, corriſponderà ad eſſe una ſola Ordinata ND poſitiva, e preſe maggiori di LN, ne corriſponderanno due, l'una come CM negativa, l'altra come MD poſitiva. Iſteſſamente nell'altra Iperbola oppoſta, alle x poſitive preſe fra i punti L, Q corriſponderanno ad eſſe due Ordinate y tutte due poſitive, l'una che va alla conveſſità, l'altra alla concavità della Curva: Alle x poi negative corriſponderanno di nuovo due Ordinate, l'una come GM negativa, l'altra come MI poſitiva: infatti SV $=$ SΩ $+$ VΩ $= c + z = y$; ST $=$ SΩ $-$ TΩ $= c + z = y$, eſſendo TΩ $= -z$; ND $=$ NB $+$ BD $= c + z = y$; lo ſteſſo ſi dica di MD; CM $=$ CB $-$ MB $= -z - c = -y$: in ſimil forma ſi diſcorra dell'altra Iperbola oppoſta GFI. Quì abbiamo per proprietà della Curva $\overline{EB}^2 - \overline{EA}^2 = \overline{CB}^2$; ma $\overline{EB}^2 = (x - b)^2$, $\overline{EA}^2 = mm = bb - cc$, $\overline{CB}^2 = (c - y)^2$, e però $xx - 2bx + bb - bb + cc = yy - 2cy + cc$, cioè $yy - 2cy - xx + 2bx = 0$: il che &c.

Co-

COROLLARIO.

38. PER la qual cosa venendoci proposta un'Equazione, nella quale non entri il piano xy, ed abbia il quadrato xx negativo, e libero da frazione, dobbiamo tosto dire, ch'ella è alla Iperbola equilatera, come ora si è veduto.

PROBLEMA IV.

39. SIA da costruirsi l'Equazione $yy - \frac{2bxy}{a} + 2ay - cc = 0$; la quale già chiaramente si vede, ch'è all'Iperbola, perchè $\frac{bb}{aa}$, quadrato della metà del coefficiente del rettangolo xy, è maggiore di zero, coefficiente in questo caso del quadrato xx; poichè non essendovi nell'Equazione questo quadrato, esso si considera come moltiplicato per lo zero. Ora trasportando i termini, e compiendo il quadrato nel primo membro, sarà $yy - \frac{2bxy}{a} + \frac{bbxx}{aa} = \frac{bbxx}{aa} - 2ay + cc$: si ponga $y - \frac{bx}{a} = z$, avremo $zz = \frac{bbxx}{aa} - 2ay + cc$; e facendo sparire la y (num. 16.) sarà $zz = \frac{bbxx}{aa} - 2az - 2bx + cc$, cioè $zz + 2az = \frac{bbxx}{aa} - 2bx + cc$; e compiendo il

quadrato nel primo membro $zz + 2az + aa = \frac{bbxx}{aa} - 2bx + cc + aa$; e facendo $z + a = u$, avraſſi $uu = \frac{bbxx}{aa} - 2bx + cc + aa$, cioè $\frac{aauu - aacc - a^4}{bb} = xx - \frac{2aax}{b}$; e compiendo il quadrato nell'omogeneo di comparazione $\frac{aauu - aacc}{bb} = xx - \frac{2aax}{b} + \frac{a^4}{bb}$, e fatta $x - \frac{aa}{b} = p$, ſarà finalmente $\frac{aauu}{bb} = pp + \frac{aacc}{bb}$. Sulla retta AG ſi deſcriva il triangolo ACB a deſtra, per eſſere il termine $\frac{2bxy}{a}$ negativo nell'Equazione propoſta; il

TAV. IV. *Fig.* 31.

qual triangolo abbia i lati AB $= a$, BC $= b$, e la nota AC ſia $= f$, e l'angolo ABC $=$ all'angolo delle Coordinate x, y: ſi prolunghino AC, AB indefinitamente, e vadano in G, L; ſi tiri GL parallela a BC, preſa una qualunque AL $= x$, ſarà GL $= \frac{bx}{a}$, AG $= \frac{fx}{a}$: ſi conduca AM $= a$, a deſtra di AG (eſſendo ſtata la ſeconda ſoſtituzione di $z + a = u$) e parallela a GL; indi condotta MH parallela ad AG, tagliata fuori dalla AL, AD $= \frac{aa}{b}$, atteſa la ſoſtituzione fatta di $x - \frac{aa}{b} = p$; e ſi dovrebbe tirare AD dalla parte oppo-

ſta

ſta di AL, ſe la ſoſtituzione foſſe ſtata di $x + \frac{aa}{b}$ $= p$; ſarà $DL = x - \frac{aa}{b} = p$; e guidate le FE, FH, l'una parallela a GL, l'altra a DL, ſarà $FG = EH = \frac{fx}{a} - \frac{af}{b}$ per la ſomiglianza de' triangoli ABC, FHG. Col centro dunque E, Diametro ſecondario $OM = \frac{2cf}{b}$ (num. 27., 34.) primario conjugato $= 2c$, (num. 22., 34.) ſi deſcrivano le due Iperbole oppoſte eguali VNQ, RPT; ſaranno eſſe il luogo dell' Equazione propoſta. Imperocchè è per proprietà della Curva (num. 6.) $\overline{EO}^2 + \overline{EH}^2 : \overline{HV}^2 = \frac{4ccff}{bb} : 4cc = 1 : \frac{bb}{ff}$; ma $\overline{EO}^2 = \frac{ccff}{bb}$, $\overline{EH}^2 = \left(\frac{fx}{a} - \frac{af}{b}\right)^2$, $\overline{HV}^2 = \left(y - \frac{bx}{a} + a\right)^2$ (che HV ſia $= y - \frac{bx}{a} + a$ è chiaro; imperocchè $HV = u$ ſtante l'Equazione ridotta; ma $u = z + a$, e $z = y - \frac{bx}{a}$, dunque $HV = u = z + a = y - \frac{bx}{a} + a$): ſoſtituiti pertanto i valori analitici nell' analogia eſprimente la proprietà della Curva, moltiplicando eſtremi, e medj, e riducendo i termini, ſi troverà l'Equazione propoſta. Alle x poi sì poſitive, che negative corriſponderanno due Ordinate y ſuperiormente,

l'una a deſtra, come LT negativa, l'altra, come LV poſitiva; due altre inferiormente, poſitiva l'una, negativa l'altra: ed infatti $LV = HV - HG + GL = u - a + \frac{bx}{a}$; ma $u = z + a = y - \frac{bx}{a} + a$; dunque $LV = y - \frac{bx}{a} + a - a + \frac{bx}{a} = y$: al contrario $LT = HT + GH - GL = -u + a - \frac{bx}{a}$; ma $-u = -z - a = \frac{bx}{a} - y - a$; dunque $LT = \frac{bx}{a} - y - a + a - \frac{bx}{a} = -y$. Similmente $LQ = QY - GY - LG = u - a + \frac{bx}{a}$, eſſendo $LG = -\frac{bx}{a}$ per i triangoli ſimili ABC, AGL; e di più $AL = -x$; dunque come prima $LQ = y$. Al contrario $LR = YR + YG + LG = -u + a - \frac{bx}{a}$, e però come prima $= -y$. Prolungate in oltre le x ſuperiormente, e inferiormente, poſitive, e negative, in modo che tocchino le due mezze Iperbole oppoſte PT, QN, corriſponderanno ad eſſe due Ordinate ſole, l'una come $LV = y$ poſitiva, l'altra come $LR = -y$ negativa, cadendo in tal caſo, come è chiaro, il punto L in T, e l'altro L in Q: prodotte poi in modo, che taglino le due accennate mezze Iperbole, corriſponderanno alle ſteſſe quattro Ordinate y, due ſuperiormente poſitive, l'una, che va alla concavità della mezza Iperbola PT, l'altra alla conveſſità dell'altra mezza VN; due

due altre inferiormente negative, l'una che va alla concavità della mezza Iperbola NQ, l'altra alla conveſſità dell'altra mezza Iperbola PR.

PROBLEMA V.

40. DEbbaſi coſtruire l'Equazione $yy - \frac{2bxy}{a} + \frac{bbxx}{2aa} + cy - ax = 0$, o ſia $yy - \frac{2bxy}{a} = -\frac{bbxx}{2aa} + ax - cy$; e compiendo il quadrato nel primo membro $yy - \frac{2bxy}{a} + \frac{bbxx}{aa} = \frac{bbxx}{2aa} - cy + ax$; e fatta la ſoſtituzione di $y - \frac{bx}{a} = z$, ſarà $zz = \frac{bbxx}{2aa} - cy + ax$; e facendo ſparire la y (num. 16.) $zz = \frac{bbxx}{2aa} - cz - \frac{bcx}{a} + ax$; e ponendo per brevità $\frac{aa - bc}{a} = m$, ſi avrà $zz + cz = \frac{bbxx}{2aa} + mx$; e compiendo il quadrato nel primo membro $zz + cz + \frac{cc}{4} = \frac{bbxx}{2aa} + mx + \frac{cc}{4}$; e fatta la ſoſtituzione di $z + \frac{c}{2} = p$, ſarà $\frac{2aapp}{bb} = xx + \frac{2aamx}{bb} + \frac{aacc}{2bb}$, cioè $\frac{2aapp}{bb} - \frac{aacc}{2bb} = xx + \frac{2aamx}{bb}$; e compiendo il quadrato nell'omoge-

nea

neo di comparazione $\frac{2aapp}{bb} + \frac{a^4mm}{b^4} - \frac{aacc}{2bb} = xx + \frac{2aamx}{bb} + \frac{a^4mm}{b^4}$; e facendo la ſoſtituzione di $x + \frac{aam}{bb} = q$, e ponendo per brevità $\frac{a^4mm}{b^4} - \frac{aacc}{2bb} = nn$, ſarà finalmente $\frac{2aapp}{bb} = qq - nn$.

TAV. IV. Fig. 32. Sulla retta QF ſi deſcriva il triangolo AMN, coi lati $AM = a$, $MN = b$, e la nota AN ſia $= f$, e l'angolo AMN = all'angolo delle Coordinate dell'Equazione propoſta: ſi prolunghi AM da una e l'altra parte, ſi tiri PF parallela a MN; preſa pertanto $AP = x$, ſarà $PF = \frac{bx}{a}$; s'abbaſſi la AH già parallela a PF, e $= \frac{c}{2}$, eſſendoſi fatta la ſoſtituzione di $z + \frac{c}{2} = p$, e condotta per il punto H parallela a QF la retta ES, ſi pigli la $AK = \frac{aam}{bb}$ per la ſoſtituzione fatta di $x + \frac{aam}{bb} = q$, e ſi laſci cadere ſino in O la retta KQ parallela a MN, ſarà $AF = \frac{fx}{a}$, $AQ = OH = \frac{afm}{bb}$, e però $OE = OH + HE = QF = \frac{fx}{a} + \frac{afm}{bb}$. Col centro O, Semidiametro traſverſo $OZ = \frac{fn}{a}$ (num. 27. 34.) col Diametro conjugato $= \frac{bn}{a}\sqrt{2}$ (num. 22., 34.) ſi deſcri-

ſcriva la Iperbola GZG, ſarà eſſa il luogo dell' Equazione propoſta; imperocchè GE ſuperiore $= p$, ſtante l' Equazione ridotta; ma $FE = AH = \frac{c}{2}$, dunque $FG = GE - EF = p - \frac{c}{2} = z$; ma è pure $PF = \frac{bx}{a}$, dunque $GP = z + \frac{bx}{a} = y$ poſitiva, e la PG inferiore $= -y$ negativa, dacchè GE inferiore $= -p$, dunque $FG = \frac{c}{2} - p = -z$, e però $PG = -z - \frac{bx}{a} = -y$. Alle Aſſiſſe x pertanto preſe $> AB$, corriſponderanno ad eſſe due Ordinate y, l'una poſitiva, l'altra negativa; preſe $= AB$, corriſponderà una ſola Ordinata BG negativa, perchè $GE = -p$, e però $GF = -p + \frac{c}{2} = -z$; onde $BG = -z - \frac{bx}{a} = -y$; preſe tra i punti V, B, ne corriſponderanno due, tutte e due negative, l'una che va alla conveſſità, l'altra alla concavità della Curva. Il ſimile ſi dica dell'altra Iperbola oppoſta, che per motivo di brevità non s' è deſcritta. Per proprietà della Curva abbiamo

$\overline{OE}^2 - \overline{OZ}^2 : \overline{EG}^2 = \frac{4ffnn}{aa} : \frac{2bbnn}{aa} = 1 : \frac{bb}{2ff}$; ma

$\overline{OE}^2 = \overline{QF}^2 = (QA + AF)^2 = \frac{ffxx}{aa} + \frac{2ffmx}{bb} + \frac{aaffmm}{b^4}$; $\overline{OZ}^2 = \frac{ffnn}{aa}$, $\overline{GE}^2 = \left(y - \frac{bx}{a} + \frac{c}{2}\right)^2$

$=$

$= yy - \frac{2bxy}{a} + \frac{bbxx}{aa} + cy - \frac{bcx}{a} + \frac{cc}{4}$; dunque l'analogia sarà $\frac{ffxx}{aa} + \frac{2ffmx}{bb} + \frac{aaffmm}{b^4} - \frac{ffnn}{aa} : yy - \frac{2bxy}{a} + \frac{bbxx}{aa} + cy - \frac{bcx}{a} + \frac{cc}{4} = 1 : \frac{bb}{2ff}$; e moltiplicando estremi, e medj, sarà $\frac{bbxx}{2aa} + mx + \frac{aammm}{2bb} - \frac{bbnn}{2aa} = \left(y - \frac{bx}{a} + \frac{c}{2}\right)^2$; e mettendo il valore di $nn = \frac{a^4mm}{b^4} - \frac{aacc}{2bb}$; avremo $\frac{bbxx}{2aa} + mx + \frac{cc}{4} = \left(y - \frac{bx}{a} + \frac{c}{2}\right)^2$, e sostituendo in fine il valore di $m = a - \frac{bc}{a}$, sarà $\frac{bbxx}{2aa} + ax - \frac{bcx}{a} + \frac{cc}{4} = yy - \frac{2bxy}{a} + \frac{bbxx}{aa} + cy - \frac{bcx}{a} + \frac{cc}{4}$; e trasportando, e riducendo i termini, avrassi finalmente $yy - \frac{2bxy}{a} + \frac{bbxx}{2aa} + cy - ax = 0$: il che &c.

PRO-

PROBLEMA VI.

41. *Data la Parabola BAC ſi dimanda il luogo di tutti i punti M tali, che avendo condotte da ciaſcheduno di queſti punti due tangenti MB, MC, l'angolo BMC, ch'eſſe comprendono ſia = a qualſivoglia dato angolo ottuſo.* TAV. IV. Fig. 33.

AVendo condotto l'Aſſe AD della Parabola data, che incontri ne' punti F, G le due tangenti MB, MC, ſi tireranno da' punti del contatto B, C, e da quelli del concorſo M le perpendicolari BD, EC, PM; indi guidata MN, che faccia ſull'Aſſe AD l'angolo FNM eguale al complemento a due retti dell'angolo dato BMC, ovvero eguale all'angolo FMG oppoſto al vertice dell'altro BMZ: ſi chiamino le indeterminate AP = x, PM = y, AF = s, AG = t, e il Parametro dell'Aſſe AD ſia uguale ad a, poichè egli è dato, eſſendo data *per ipoteſi* la Parabola BAC. Ciò dunque poſto: ſi avrà $\overline{FM}^2 = ss - 2sx + xx + yy$, a cauſa del triangolo rettangolo FPM; quindi $FM = \sqrt{(ss - 2sx + xx + yy)}$; ma per la ſomiglianza de' triangoli FGM, FMN, abbiamo FG : FM = FM : FN; dunque $\frac{ss - 2sx + xx + yy}{s - t} = FN$; e però

$PN = FN - FP = \frac{ss - 2sx + xx + yy}{s - t} - s + x = \frac{ss - sx - tx + xx + yy}{s - t}$. Ora per la ſimi-

litudine de' triangoli FPM, FDB, abbiamo FP: PM = FD: DB; ma FP = $s - x$, PM = y, FD = $2s$ per una nota proprietà della Parabola, come ſottotangente riſpetto alla tangente BF, BD = $\sqrt{as}$ (num. 4.) dunque $s - x : y = 2s : \sqrt{as}$; e quadrando $(s-x)^2 : yy = 4ss : as = 4s : a$; e moltiplicando eſtremi, e medj, e riducendo, ſi ha $ss - 2sx - \frac{4yys}{a} + xx = 0$. Iſteſſamente la ſimilitudine de' triangoli GPM, GEC, ci dà GP: PM = GE: CE; ma GP = $x - t$, PM = y, GE = $2t$, come ſottotangente riſpetto la tangente GC; CE = $\sqrt{at}$ (num. 4.); dunque $x - t : y = 2t : \sqrt{at}$; e quadrando $(x-t)^2 : yy = 4tt : at = 4t : a$; per la quale analogia abbiamo l'Equazione $tt - 2tx - \frac{4tyy}{a} + xx = 0$; e facendo per comodità di calcolo $p = 2x + \frac{4yy}{a}$, la prima Equazione diverrà $ss - ps + xx = 0$, la ſeconda $tt - pt + xx = 0$; e ſottraendo la ſeconda Equazione dalla prima, s'avrà $ss - tt - ps + pt = 0$, cioè $ss - tt = ps - pt$; e dividendo per $s - t$, $s + t = p$, e però $s = p - t$, e $ss = ps - ts = ps - xx$, a cauſa della prima Equazione $ss - ps + xx = 0$; quindi $ps - ts = ps - xx$, e però $ts = xx$, e $4ts = 4xx$; ma $ss + 2st + tt = pp$, dunque $ss + 2st + tt - 4st = pp - 4xx$, cioè $ss - 2st + tt = pp - 4xx$, e $s - t = \sqrt{(pp - 4xx)} = \frac{4y\sqrt{(ax+yy)}}{a}$; ſoſtituendo in vece di p il di lei valore

re $2x + \frac{4yy}{a}$; onde mettendo nell'algebraica eſpreſſione di PN ſopra ritrovata i valori di $s + t$, st, e $s - t$, che ſono $2x + \frac{4yy}{a}$, xx, e $\frac{4y\sqrt{(ax+yy)}}{a}$, avremo $\frac{ay - 4xy}{4\sqrt{(ax+yy)}} = PN$. Ora prendendo ſull'Aſſe la parte $NQ = a =$ al Parametro della Parabola; e conducendo QT parallela a PM che incontri in T la NM prolungata quanto farà biſogno, è chiaro che la linea QT ſarà data; poichè nel triangolo QTN, gli angoli TQN, TNQ ſono dati, eſſendo il primo retto, e l'altro $=$ all'angolo $FMG = ZMB$, cioè uguale al complemento a due retti dell'angolo ottuſo dato BMC; e di più NQ è nota per eſſerſi preſa uguale al Parametro della Parabola. Si chiami dunque $QT = b$, e per i triangoli rettangoli PMN, NQT, ſi avrà l'analogia $PN\left(\frac{ay - 4xy}{4\sqrt{(ax+yy)}}\right) : PM\,(y) = \frac{a - 4x}{4\sqrt{(ax+yy)}} : 1 = a : b$, e però l'Equazione $ab - 4bx = 4a\sqrt{(ax + yy)}$; e togliendo l'aſimmetria, e riducendo l'Equazione allo zero, $yy - \frac{bbxx}{aa} + ax + \frac{bbx}{2a} - \frac{bb}{16} = 0$; la quale maneggiata giuſta al ſolito, e fatta la ſoſtituzione di $\frac{2a^3 + abb}{4bb} - x = -u$, ſi ridurrà $\frac{aayy}{bb} = uu - \frac{a^6 - a^4bb}{4b^4}$. Sull'Aſſe AD della

Parabola si pigli $AH = \frac{2a^3 + abb}{4bb}$; col centro H, Asse trasverso $= \frac{aa\sqrt{(aa+bb)}}{bb} = IK$, col conjugato $\Phi O = \frac{a\sqrt{(aa+bb)}}{b}$ (num. 22., 34.) si descriva la Iperbola $Y M \Omega$, sarà essa il luogo della Equazione ritrovata: quì s'avverta, che $HP = -u$, giacchè questo è arbitrario, ed è lo stesso $(x - \frac{2a^3 - abb}{4bb})^2$, che $(\frac{2a^3 + abb}{4bb} - x)^2$. La proprietà della Curva ci dà $\overline{HP}^2 - \overline{IH}^2 : \overline{PM}^2 = \frac{a^6 + a^4bb}{b^4} : \frac{a^4 + aabb}{bb} = aa : bb$; ma $\overline{HP}^2 = (\frac{2a^3 + abb}{4bb} - x)^2$, $\overline{IH}^2 = \frac{a^6 + a^4bb}{4b^4}$, $\overline{PM}^2 = yy$; sostituendo pertanto questi valori nell'analogia ora istituita, moltiplicando estremi, e medj, si troverà l'Equazione, che si è costruita.

COROLLARIO.

42. COnducendosi la retta IO; sarà nel triangolo rettangolo IHO, $IO = \sqrt{(\overline{IH}^2 + \overline{HO}^2)} = \frac{a^3 + abb}{2bb}$; quindi trasportando la retta IO nel Semiasse HI, principiando in H, e venendo in giù, il pun-

punto R, in cui cadrà il termine della retta IO, sarà il fuoco sì dell'Iperbola, come della Parabola; essendo $KR = \frac{a^3 + abb + aa\sqrt{(aa+bb)}}{2bb}$, $RI = \frac{a^3 + abb - aa\sqrt{(aa+bb}}{2bb}$) e però $KR \cdot RI = \frac{a^4 + aabb}{4bb} = \overline{HO}^2$; quindi per una nota proprietà dell'Iperbola, sarà il punto R il fuoco di tal Curva: rispetto alla Parabola, $AR = RH - AH = \frac{a^3 + abb}{2bb} - \frac{2a^3 - abb}{4bb} = \frac{a}{4}$, cioè uguale alla quarta parte del Parametro della Parabola; adunque (num. 20.) sarà anche il punto R il di lei fuoco.

PRO-

PROBLEMA VII.

TAV. IV. Fig. 34.

43. *Dato un Circolo, che abbia per centro il punto A, e per raggio la retta AM con due punti E, F ſul medeſimo piano: trovare ſulla periferia al di dentro dell' angolo EAF, il punto M tale, che avendo condotto le rette AM, EM, ME, li due angoli AME, AMF ſiano tra loro uguali. Si ſupponga, che le linee EA, AF ſiano diſuguali; perchè ſe foſſero eguali, è chiaro per i ſemplici Elementi di Geometria, che la retta ſecante in due parti uguali l' angolo EAF ſodisfarebbe al queſito, tagliando la periferia nel punto ricercato: ed in oltre per maggiore chiarezza ſi ponga, che AE < AF.*

DAl punto ricercato M ſi tirino le rette MB, MD, che facciano nelle AF, AE gli angoli MBA, MDA eguali agli angoli AMF, AME, e per conſeguenza tra loro eguali; a cauſa de' triangoli ſimili AFM, AMB, ſi avrà AF: AM = AM: AB; così pure per i triangoli ſimili AME, AMD, ſarà AE: AM = AM: AD. Ma poichè le linee AF, AE ſono date inſieme col raggio AM, le parti AB, AD delle rette AF, AE ſaranno pure date. Condotte le rette MP, MQ parallele ad AE, AF, i triangoli BPM, DQM ſaranno ſimili; poichè gli angoli PBM, QDM ſono eguali, eſſendo i complementi a due retti degli angoli eguali MBA, MDA: ſi chiamino adunque le rette AB = a, AD = b, e le indeterminate AP = QM.

$= QM = x$, $PM = AQ = y$; quindi sarà BP $(x - a) : PM\ (y) = DQ\ (y - b) : QM\ (x)$; e però l' Equazione $xx - ax = yy - by$, cioè $yy - by - xx + ax = o$, ch'è all' Iperbola equilatera (num. 38.): la quale col metodo solito si riduce (facendo le due sostituzioni di $y - \frac{b}{2} = z$, e di $x - \frac{a}{2} = u$) $zz = uu + \frac{bb - aa}{4}$. Siano prese sulle rette AF, AE le parti AB, AD terze proporzionali ad AF, AM, ed AE, AM; si conduca per il punto di mezzo C della retta BD una retta indefinita CH parallela ad AB, sulla quale si prenda la parte $CK = \frac{\sqrt{(bb - aa)}}{2} =$ all'uno, e l'altro delli due Semidiametri conjugati: la linea poi $AD = b$, sarà maggiore di $BA = a$, perchè si è posto $AF > AE$. Col centro C, e colla metà del secondo Diametro, cioè colla retta CK, si descriva la Iperbola equilatera MD, colle Ordinate HM parallele ad AD, dico che essa incontrerà la circonferenza del Cerchio dato al punto cercato M: imperocchè conducendo CL parallela ad AD, è chiaro che $AL = LB$, e $AO = OD$, perchè nel punto C è tagliata pel mezzo la retta DB; quindi $CH = AP - AL = x - \frac{a}{2}$, $HM = AQ - AO = y - \frac{b}{2}$: ora per proprietà dell' Iperbola equilatera abbiamo $\overline{HM}^2 = \overline{CH}^2 + \overline{CK}^2$ (num. 6.) cioè, in termini analitici

litici $yy - by + \frac{bb}{4} = xx - ax + \frac{aa}{4} + \frac{bb}{4} - \frac{aa}{4}$, cioè $yy - by - xx + ax = o$: il che &c.

CAPO QUARTO.

Dell' Equazioni all' Iperbola fra gli Assintoti.

44. L'Equazione sempliciſſima all' Iperbola fra gli Assintoti, abbiamo veduto al num 6., ch' ella è $xy = ab$, in cui ſi vede, che il termine cognito è uguale al rettangolo coſtante; il che pure ſi verifica in tutte le altre Equazioni ridotte, provenienti da quelle, che non hanno alcuno de' quadrati delle incognite, le quali perchè ſiano alla Iperbola tra gli Assintoti, è neceſſario che il rettangolo xy ſia poſitivo, e libero da frazione, e che negli altri termini ci ſia il rettangolo delle coſtanti in una, o l'altra, o anche in tutte e due le incognite; come per eſempio ſe l'Equazione foſſe $xy - ay + cx - aa = o$. Quanto poi all'altre, cioè a quelle, nelle quali ci cade o l'uno, o l'altro de' quadrati delle Coordinate; che ciò è appunto, onde ſi differenziano dall' altre Equazioni, che ſoglionſi regolarmente proporre, il metodo di trovare il rettangolo coſtante ſi darà al num. 47.

PRO-

PROBLEMA I.

45. SIA proposta da costruirsi l'Equazione $xy + ax - cc = 0$, ovvero $xy + ax = cc$, si ponga $y + a = z$, e sarà $xz = cc$. Col centro A tra gli Assintoti CB, DE comprendenti il dato angolo delle Coordinate si descrivano le due Iperbole opposte FG, HL del rettangolo costante $= cc$, presa una qualunque $AM = x$, sarà la corrispondente Ordinata $MN = z$ in forza dell'Equazione ridotta; ma per la sostituzione abbiamo $y = z - a$, fatta $MO = a$, e condotta OP parallela all'Assintoto CB, sarà $PO = AM = x$, ON superiore $= z - a = y$, ON inferiore $= a - z = -y$. Sarà dunque nel punto P l'origine delle x, positive verso O, negative alla parte opposta; alle quali, prese positive tra i punti P, G, e sieno uguali a PO, corrisponderanno due Ordinate y, l'una superiore positiva, l'altra inferiore negativa: prese $=$ PG, ne corrisponderà una sola Ordinata GN negativa $= -y$; prese poi maggiori di PG, e sieno uguali a PQ, ne corrisponderanno due, tutte due negative, l'una che va alla concavità dell'Iperbola superiore, l'altra alla convessità della inferiore; ed in fatti la minore $QN = a - z = -y$, QN maggiore $= -z + a = -y$; lo stesso si dica dell'altra Iperbola opposta HL. La proprietà della Curva richiede, che $AM \cdot MN = cc$; ma $AM = x$, $MN = y + a$; dunque $xy + ax = cc$, cioè $xy + ax - cc = 0$: il che &c. TAV. IV. Fig. 35.

PROBLEMA II.

46. ABbiaſi a coſtruire l'Equazione $xy - 2ax - cy + ab = 0$, cioè $xy - 2ax = cy - ab$; ſi faccia $y - 2a = z$, ſarà $xz = cy - ab$; e facendo ſparire la y, mettendone il di lei valore, che ſi cava dalla ſoſtituzione fatta, cioè $y = z + 2a$, avraſſi $xz = cz + 2ac - ab$, oſſia $xz - cz = 2ac - ab$; e fatta finalmente l'altra ſoſtituzione di $x - c = u$, ſarà $uz = 2ac - ab$. Si ſupponga, che ſia $2c > b$, cioè poſitivo il rettangolo coſtante: fra gli Aſſintoti DE, AC, comprendenti il dato angolo delle Coordinate, ſi deſcrivano le Iperbole oppoſte FG, HI del rettangolo coſtante $2ac - ab$; preſa una qualunque BK $= u$, ſarà la corriſpondente Ordinata KL $= z$, ſtante l'Equazione ridotta; ma per le due ſoſtituzioni fatte, abbiamo $x = u + c$, e $y = z + 2a$; adunque, preſa MB $= 2a$, e condotta per il punto M la parallela NO all'Aſſintoto AC, e prolungata LK in P, indi preſa MQ $= c$, ſarà QP $= u + c = x$ poſitiva, PL $= z + 2a = y$. Sarà pertanto in Q l'origine delle x, poſitive a deſtra, negative a ſiniſtra; alle quali, preſe poſitive tra' punti M, R, corriſponderanno d e Ordinate y, la ſuperiore, come abbiamo veduto, poſitiva, la inferiore PL negativa; perchè queſta è $= -z - 2a = -y$; preſe poi le $x =$ QR, corriſponderà una ſola Ordinata y, RL poſitiva; preſe poi maggiori di QR, corriſponderanno due Ordinate y, tutte e due poſitive, una che va alla concavità dell'Iperbola LG, l'

TAV. IV. Fig. 36.

al-

altra alla conveſſità dell' altra Iperbola FG; imperocchè RL $= z + 2a = y$, SG minore $= 2a + z = y$ (eſſendo KG inferiore $= -z$) SG maggiore $= 2a + z = y$: lo ſteſſo ſi dica dell' Iperbola IH.

Se foſſe $b > 2c$, il rettangolo coſtante ſarebbe negativo: ſi ponga $2ac - ab = -mm$, ſarà la finale Equazione, ritenute già le medeſime ſoſtituzioni, $uz = -mm$: laonde ſi deſcrivano le due Iperbole oppoſte TL, LR negli altri due angoli ABE, DBC, ſaranno nello ſteſſo modo queſte due Iperbole il luogo di queſta ultima Equazione: imperocchè, preſa alla parte oppoſta una qualunque MP $=$ ZB $= -u$, ſarà QP $= -u - c = -x$; e condotta l'Ordinata PΩ, ſarà eſſa $= y$, eſſendo ZΩ $= z$, e ZP $= 2a$. Alle x pertanto negative, preſe tra' punti Q, Φ, inſiſteranno due Ordinate y, una ſuperiore poſitiva, l'altra inferiore negativa; preſe $=$ QΦ, inſiſterà una ſola Ordinata poſitiva; e determinate maggiori di QΦ, inſiſteranno ſulle x due Ordinate y, tutte due poſitive, l'una che va alla Iperbola TΩL, l'altra alla IΦH: che ſe ſi prenda MP $= -u <$ MQ, che è $= c$, in tal caſo PQ $=$ MQ $-$ MP $= c + u = x$: quindi anco alle x poſitive, preſe tra i punti Q, M, inſiſteranno due Ordinate y, l'una ſuperiore poſitiva, l'altra inferiore negativa. Quanto alla prima coſtruzione, abbiamo per proprietà della Curva BK · KL $= 2ac - ab$; ma BK $=$ MP $=$ QP $-$ QM $= x - c$, KL $= y - 2a$; dunque $(x - c) \cdot (y - 2a) = 2ac - ab$, cioè $xy - 2ax - cy + 2ac = 2ac - ab$, ch'è lo ſteſſo, che $xy - cy - 2ax + ab = 0$. Pari-

mente $BZ \cdot Z\Omega = 2ac - ab$; ma $BZ = MQ + PQ = c - x$; $Z\Omega$ inferiore $= -z = 2a - y$; dunque $(c - x) \cdot (2a - y) = 2ac - ab$, cioè $xy - 2ax - cy + ab = 0$, come prima.

Riſpetto alla ſeconda coſtruzione $BZ \cdot Z\Omega = mm = ab - 2ac$; ma $BZ = c - x$, $Z\Omega$ ſuperiore $= y - 2a$; dunque $(c - x) \cdot (y - 2a) = mm = ab - 2ac$, e $cy - 2ac - xy + 2ax = ab - 2ac$, cioè $xy - cy - 2ax + ab = 0$. Finalmente riſpetto alla Iperbola GRL, $BK \cdot KL = mm = ab - 2ac$; ma $BK = x - c$, KL inferiore $= -z = 2a - y$, e però ſarà $(x - c) \cdot (2a - y) = mm = ab - 2ac$, cioè $xy - cy - 2ax + ab = 0$: il che &c.

PRO-

PROBLEMA III.

47. IN fine tutte l'Equazioni, che ſi vogliano, o debbano coſtruire tra gli Aſſintoti, ſi comprendono generalmente ſotto le ſeguenti:

$$\frac{gxx}{b} + xy = ab \pm mx \pm ny,$$

$$xy - \frac{gxx}{b} = ab \pm mx \pm ny,$$

$$\frac{gxx}{b} - xy = ab \pm mx \pm ny,$$

$$-\frac{gxx}{b} - xy = ab \pm mx \pm ny.$$

oppure

$$\frac{gyy}{b} + xy = ab \pm mx \pm ny,$$

$$xy - \frac{gyy}{b} = ab \pm mx \pm ny,$$

$$\frac{gyy}{b} - xy = ab \pm mx \pm ny,$$

$$-\frac{gyy}{b} - xy = ab \pm mx \pm ny.$$

Le prime quattro ſono ſtate eccellentemente, ed ingegnoſamente coſtruite dalla Dotta *Sig. D. Maria Gaetana Agneſi nel primo Tomo delle di lei Analitiche Iſtituzioni al num.* 131., nè di eſſe occorre dire altro; potendo ognuno a talento ſodisfarſi nel citato libro. Quanto alle ultime quattro: ſi pigli la prima coi ſegni tutti poſitivi, cioè $xy + \frac{gyy}{b} = ab + mx + ny$. Si ponga $x + \frac{gy}{b} = z$, ſarà $yz = ab +$

mx

$mx + ny$; e facendo ſparire la x, mettendo il di lei valore, che ſi cava dalla ſoſtituzione ora fatta; ed è $x = z - \frac{gy}{b}$, avremo $zy = ab + mz - \frac{gmy}{b} + ny$: ſi faccia $z - n + \frac{gm}{b} = p$ (ſupponendo però $\frac{gm}{b} - n < o = -c$) ſarà $py = ab + mz$; e ſoſtituendo invece di z il di lei valore dato per queſta ultima ſoſtituzione, ch'è $z = p - \frac{gm}{b} + n$, avraſſi $py = ab + mp - \frac{gmm}{b} + mn$; e fatta finalmente $y - m = q$, ſarà $pq = ab + mn - \frac{gm^2}{b}$. Sulla retta AC ſi deſcriva il triangolo ACB a deſtra di AF, per eſſere il termine $\frac{gyy}{b}$ poſitivo, e che abbia i lati AB $= b$, BC $= g$, AC nota $= f$, e l'angolo ABC ſia uguale al complemento a due retti dell'angolo delle Coordinate x, y: ſi prolunghino AB, AC indefinitamente, e ſi tiri FQ parallela a BC, preſa una qualunque AQ $= y$, ſarà FQ $= \frac{gy}{b}$, e AF $= \frac{fy}{b}$: ſulla AQ ſi prenda AE $= m$, ſarà EQ $= y - m = q$; e condotta SN parallela ad EQ, ed ES pure parallela a FQ, ſarà FS $= \frac{fy - fm}{b} = \frac{fq}{b}$; tirata indi AD $= c = n - \frac{gm}{b}$, parallela

TAV. IV. Fig. 37.

ad

ad FQ, e a deſtra di AF, eſſendoſi ſuppoſto $\frac{gm}{b} - n < o = -c$; e innoltre condotta DG indefinita parallela ad AF, tra gli Aſſintoti DH, LT, l'uno parallelo ad AF, l'altro a FQ, ſi deſcrivano le due Iperbole oppoſte del rettangolo coſtante $\frac{f}{b} \cdot (ab + mn - \frac{gmm}{b}) =$ al quarto proporzionale di AB, AC, e del rettangolo coſtante dell' Equazione finale, ſaranno eſſe il luogo dell' Equazione propoſta. Imperocchè, parlando dell' Iperbola ſuperiore, prolungata FQ in M, e tirate le AP, PM, l'una parallela a QM, l'altra ad AQ; avremo per proprietà della Curva $OG \cdot GM = \frac{f}{b} \cdot (ab + mn - \frac{gmm}{b})$; ma $OG = FS = \frac{fy - fm}{b}$, $GM = QM + FQ - FG = x + \frac{gy}{b} + \frac{gm}{b} - n$; dunque ſarà $(\frac{fy-fm}{b}) \cdot (x + \frac{gy + gm}{b} - n) = \frac{f}{b} \cdot (ab + mn - \frac{gmm}{b})$, cioè $(y - m) \cdot (x + \frac{gy + gm}{b} - n) = ab + mn - \frac{gmm}{b}$; e facendo l'attuale moltiplicazione nel primo membro, ſi avrà $xy + \frac{gyy}{b} = ab + mx + ny$: il che &c.

Che poi $QM = AP = x$, è chiaro; perchè $GM = p$ ſtante l'Equazione ridotta, dunque FM

=

$= p + c = p + n - \frac{gm}{b} = z$; e però QM = FM — FQ = $z - \frac{gy}{b} = x$. Alle Aſſiſſe dunque AP = x poſitive, corriſponderà una ſola Ordinata PM = y nell' Iperbola ſuperiore poſitiva; e alle ſteſſe x negative che paſſino la Curva ZM, ne corriſponderà un'altra PM pure poſitiva nell' Iperbola inferiore. Che ſe ſi prendano le x negative tra la Curva ZM, ed il punto A, corriſponderà ad eſſe un Ordinata negativa, che va alla conveſſità della ſteſſa Iperbola ZM.

Preſa AQ ≺ AE, cioè $y \prec m$, ſarà EQ = $m - y = -q$; e fatta parallela FN a QE, ſarà SF inferiore = $\frac{fm - fy}{b} = -\frac{fq}{b}$; onde in tal caſo ſi dovrà rivolgere all'Iperbola inferiore: tirata adunque l'Ordinata GM, e le AP, PM, l'una parallela a GM, l'altra ad AQ, ſarà in queſto caſo l'Iperbola ZM inferiore il luogo della ſteſſa Equazione. Imperocchè $OG \cdot GM = \frac{f}{b} \cdot \left(ab + mn - \frac{gmm}{b} \right)$; ma $OG = \frac{fm - fy}{b}$, $GM = -x - \frac{gy}{b} + n - \frac{gm}{b}$, e però $OG \cdot GM = \frac{f}{b} \cdot \left(ab + mn - \frac{gmm}{b} \right)$ ci darà $xy + \frac{gyy}{b} = ab + mx + ny$ come prima. Che poi QM = AP = $-x$ anco in queſto caſo ſi vede chiaramente; imperocchè GM = $-p$; ma QM = GM — FG + FQ, e GM — FG = $-p -$

$-p-c=-p-n+\frac{gm}{b}=-z$, e $FQ=\frac{gy}{b}$, dunque $QM=\frac{gy}{b}-z=-x$. Se foſſe $\frac{gm}{b}-n>0=c$, in tal caſo ſi tiri AD dalla parte oppoſta, cioè a ſiniſtra di AF; il che certo ſuccede, quando l'Equazione è $\frac{gyy}{b}+xy=ab+mx-ny$.

Sia l'Equazione $xy+\frac{gyy}{b}=ab-mx+ny$; la prima ſoſtituzione è già $x+\frac{gy}{b}=z$, e l'Equazione diviene $zy=ab-mz+\frac{gmy}{b}+ny$, mettendo il valore di $x=z-\frac{gy}{b}$; onde fatta la ſeconda ſoſtituzione $z-\frac{gm}{b}-n=p$, ſarà, facendo ſparire la z, $py=ab-mp-mn-\frac{gmm}{b}$; e fatta la terza $y+m=q$, avraſſi finalmente $pq=ab-mn-\frac{gmm}{b}$: ſi ſupponga la quantità $ab-mn-\frac{gmm}{b}$ poſitiva, il rettangolo coſtante è $=\frac{ff}{b}\cdot\left(ab-mn-\frac{gmm}{b}\right)$. Nella ſteſſa poſizione come prima ſi deſcriva il triangolo ACB coi lati $AB=b$, $BC=g$, e ſia la nota $AC=f$; e l'angolo ABC = al complemento a due retti di quello delle Coordinate x, y; prodotte le AB, AC ſino in Q, F, ſi tiri TAV. IV. Fig. 38.

FQ parallela a BC, sarà $FQ = \frac{gy}{b}$ (presa prima $AQ = y$) e $AF = \frac{fy}{b}$; si prolunghino le AB, AC al di sotto, e si prenda $AR = m$; sicchè tirata RO parallela a BC, sarà $AO = \frac{fm}{b}$; quindi avremo $FO = \frac{fy + fm}{b} = \frac{fq}{b}$; dipoi presa $OS = n + \frac{gm}{b}$, essendo nella sostituzione questa quantità negativa; fra gli Assintoti GG, LL, l'uno parallelo ad OF, l'altro a FQ si descrivano le due Iperbole opposte MD, MD, saranno esse il luogo dell' Equazione proposta: imperocchè $SG \cdot GM = \frac{f}{b} \cdot \left(ab - mn - \frac{gmm}{b}\right)$; ma $SG = FO = \frac{fy + fm}{b}$, $GM = QM + FQ - FG$, e $QM = x$, $FQ = \frac{gy}{b}$, $FG = n + \frac{gm}{b}$; sostituendo dunque tali valori, e moltiplicando attualmente, troveremo l' Equazione, che si è costruita. Rispetto alla Iperbola inferiore si prenda AP dalla parte opposta, prolungata AQ all' ingiù, e condotte PM parallela ad AQ, e l' Ordinata GM, sarà nello stesso modo $SG \cdot GM = \frac{f}{b} \cdot \left(ab - mn - \frac{gmm}{b}\right)$; ma $SG = DG - DS = AF - AO = -\frac{fy - fm}{b}$, $GM = GF + FQ$

+

$+ MQ$, e $GF = n + \frac{gm}{b}$, $FQ = -\frac{gy}{b}$, $MQ = -x$; dunque $(\frac{-fy-fm}{b}) \cdot (n + \frac{gm}{b} - \frac{gy}{b} - x) = \frac{f}{b} \cdot (ab - mn - \frac{gmm}{b})$ ci darà medeſimamente la Equazione, che ora ſi è coſtruita. Alle Aſſiſſe $AP = x$ poſitive, tra il punto A, e la Curva MD, e negative, corriſponderanno due Ordinate $PM = y$, l'una che va alla Iperbola ſuperiore, poſitiva; l'altra negativa nell'Iperbola inferiore: preſe le x poſitive di là dalla Curva MD, inſiſtera ad eſſe un'Ordinata negativa, che va alla concavità dell'Iperbola ſuperiore.

Sia l'Equazione $xy + \frac{gvv}{b} = ab - mx - ny$; la prima ſoſtituzione è già $x + \frac{gy}{b} = z$, la ſeconda $z + n - \frac{gm}{b} = p$, e la terza $y + m = q$; onde l'Equazione finale diviene $pq = ab + mn - \frac{gmm}{b}$; ed il rettangolo coſtante $= \frac{f}{b} \cdot (ab + mn - \frac{gmm}{b})$. Si prenda $OS = c = \frac{gm}{b} - n$ a deſtra di OF, ſe $n - \frac{gm}{b} < o = -c$, e a parte ſiniſtra, ſe $n - \frac{gm}{b} > o = c$: ed il reſto ſi eſeguiſca con l'ordine ſin'ora tenuto.

Fin quì ſi è ſuppoſto il rettangolo coſtante quantità

poſitiva ; ma quando anche foſſe negativa , non può fare veruna alterazione , avvertendo ſolo di deſcrivere le due Iperbole negli altri due angoli relativamente al rettangolo coſtante, tirando alla parte deſtra, o ſiniſtra di OF, la linea AD = OS, ſecondo i caſi già conſiderati . Reſta adunque generalmente coſtruita la prima delle quattro Equazioni propoſte

$$xy + \frac{gyy}{b} = ab \pm mx \pm ny.$$

La ſeconda Equazione è $xy - \frac{gyy}{b} = ab \pm mx \pm ny$, la quale abbia nell' omogeneo di comparazione tutti i termini col ſegno poſitivo , cioè ſia $xy - \frac{gyy}{b} = ab + mx + ny$; ſi faccia la ſoſtituzione di $x - \frac{gy}{b} = z$, e ſarà $yz = ab + mz + \frac{gmy}{b} + ny$; e ponendo $z - \frac{gm}{b} - n = p$, ſi avrà $py = ab + mp + \frac{gmm}{b} + mn$; e fatta l' ultima ſoſtituzione di $y - m = q$, ſarà $pq = ab + \frac{gmm}{b} + mn$. A ſi-

TAV. IV. Fig. 39. niſtra di AF, avendo poſto $x - \frac{gy}{b} = z$, ſi deſcriva il triangolo ABC con i lati AB = b, BC = g, e ſia la nota AC = f, e l'angolo ABC = all' angolo delle Coordinate x, y; ſi prolunghino AB, AC; ſi determini AQ = y, poſcia ſi tiri QF parallela a BC,

BC, ſarà eſſa $= \frac{gy}{b}$; ſi tagli dalla AQ, AE $= m$, indi condotta RN parallela a QE, ſarà NR $= y - m$, e RF $= \frac{fy - fm}{b}$: ſi guidino le rette AP, PM, l'una parallela a QF, l'altra ad AQ; dipoi prolungata la QF fino in M, e preſa nella AP, AD $= \frac{gm}{b} + n$, fra gli Aſſintoti HH, LL, l'uno parallelo ad AF, l'altro a QM, ſi deſcrivano le due Iperbole oppoſte MS, MS del rettangolo coſtante $\frac{f}{b} \cdot (ab + \frac{gmm}{b} + mn)$, ſaranno eſſe il luogo della Equazione propoſta: imperciocchè OG · GM $= \frac{f}{b} \cdot (ab + \frac{gmm}{b} + mn)$; ma OG $=$ RF $= \frac{fy - fm}{b}$, GM $= x - \frac{gy - gm}{b} - n$; ſoſtituendo queſti valori, e moltiplicando attualmente, ſi troverà l'Equazione coſtruita.

Preſa AQ $<$ AE, cioè $y < m$, ſarà EQ $= m - y = -q$, e OG inferiore $=$ FR $= -\frac{fq}{b} = \frac{fm - fy}{b}$; GM Ordinata all'Iperbola inferiore $= -x + \frac{gy + gm}{b} + n$; ſicchè mettendo di nuovo queſti

ſti valori in luogo di OG, MG, ſi troverà ancora la medeſima Equazione. Che poi $QM = AP = x$ riſpetto all'Iperbola ſuperiore, ſi vede chiaramente; perchè $GM = p$; ma $FG = \frac{gm}{b} + n$, dunque $FM = p + \frac{gm}{b} + n = z$; ma in oltre è $QF = \frac{gy}{b}$, dunque $QM = z + \frac{gy}{b} = x$: riguardo poi all'Iperbola inferiore, $GM = -p$ ſtante già l'Equazione ridotta; ma $FG = \frac{gm}{b} + n$, e $QF = \frac{gy}{b}$, dunque $QM = -p - \frac{gm}{b} - n - \frac{gy}{b} = -z - \frac{gy}{b} = -x$, eſſendo $-p - \frac{gm}{b} - n = -z$. Riſpetto alla corriſpondenza delle Ordinate y, ſi oſſervi ciò, che ſi è detto al §. 3. di queſto numero.

Sia la Equazione $xy - \frac{gyy}{b} = ab - mx + ny$: la prima ſoſtituzione è di $x - \frac{gy}{b} = z$, e ſi ha $yz = ab - mz - \frac{gmy}{b} + ny$; la ſeconda di $z + \frac{gm}{b} - n = p$, e ſarà $py = ab - mp - mn + \frac{gmm}{b}$; la terza di $y + m = q$, e avremo finalmente $pq = ab + \frac{gmm}{b} - mn$. Sia $\frac{gm}{b} - n < o = -c$.

Sul-

Sulla retta AF a ſiniſtra ſi deſcriva il triangolo ABC, coi lati AB = b, BC = g, e ſia la nota AC = f, e l'angolo ABC = all' angolo delle Coordinate x, y: ſulla AB prodotta ſi prenda AQ = y, e condotta QF parallela a BC, ſarà QF = $\frac{gy}{b}$; ſi tiri AD = c = $n - \frac{gm}{b}$ a deſtra di AF (eſſendo $\frac{gm}{b} - n < o$ = $-c$) e parallela a QF, e ſia prodotta in P: di poi ſi guidi PM, parallela ad AQ: ſi prolunghi QF in M: e ſi produca in oltre AB in E, e ſia AE = m: oltre a ciò ſi prolunghi la AC in R, onde RE ſia parallela a BC: finalmente prodotta la RE in O, col centro O, fra gli Aſſintoti GG, LL, l'uno parallelo a RF, l'altro a QM, ſi deſcrivano le due Iperbole oppoſte MS, MS del rettangolo coſtante = $\frac{f}{b} \cdot (ab + \frac{gmm}{b} - mn)$, ſaranno eſſe il luogo dell' Equazione propoſta. Imperocchè la proprietà della Curva ci dà OG. GM = $\frac{f}{b} \cdot (ab + \frac{gmm}{b} - mn)$; ma OG = AF + AR = $\frac{fy + fm}{b}$, GM = $x - \frac{gy + gm}{b} - n$; dunque &c. Che QM = AP = x, ſi vede chiaramente; perchè GM

TAV. IV. Fig. 40.

$GM = p$ per l'Equazione ridotta; ma $FG = n - \frac{gm}{b}$, dunque $FM = p + n - \frac{gm}{b} = z$; ma è pure $QF = \frac{gy}{b}$, onde $QM = FM + QF = z + \frac{gy}{b} = x$. Preſa $AQ = -y$, ſarà $QF = -\frac{gy}{b}$, $GM = -p$, $FG = n - \frac{gm}{b}$; quindi $FM = n - \frac{gm}{b} + p = z$, e però $QM = -\frac{gy}{b} - z = -x$. Anche in queſto caſo $OG \cdot GM = \frac{f}{b} \cdot (ab + \frac{gmm}{b} - mn)$; ma $OG = AF - AR = -\frac{fy - fm}{b}$, $GM = FG - FM$; ora $FG = n - \frac{gm}{b}$, $FM = -\frac{gy}{b} + x$, dunque $GM = n - \frac{gm}{b} - x + \frac{gy}{b}$; e però ancora $(\frac{-fy - fm}{b}) \cdot (n - \frac{gm + gy}{b} - x) = \frac{f}{b} \cdot (ab + \frac{gmm}{b} - mn)$ ci reſtituiſce l'Equazione propoſta: in quanto poi alla corriſpondenza delle Ordinate y, ſi noti ciò, che s'è detto al §. 5. di queſto numero. Che ſe $\frac{gm}{b} - n > 0 = c$; ſi tiri $AD = c = \frac{gm}{b} - n$ a ſiniſtra di AF, e

nel

nel rimanente s'oſſervi ciò, che fin ora ſi è fatto.

Il termine ab fu preſo ſempre poſitivo; ma ſe ſi prenda anche negativo, niuna alterazione può fare, ſe non che rendere negativo il rettangolo coſtante dell' Equazioni ridotte; il qual caſo è già ſtato coſtruito.

Le due ultime Equazioni ſono

$$\frac{gyy}{b} - xy = ab \pm mx \pm ny,$$

$$-\frac{gyy}{b} - xy = ab \pm mx \pm ny;$$

mutando i ſegni ſaranno,

$$xy - \frac{gyy}{b} = -ab \mp mx \mp ny,$$

$$xy + \frac{gyy}{b} = -ab \mp mx \mp ny;$$

ma queſta è ſtata coſtruita nel coſtruire la prima, e l'altra nel coſtruire la ſeconda; e però generalmente ſono ſtate coſtruite le quattro Equazioni da prima propoſte: il che era da farſi.

48. Finalmente non laſcio d'avvertire, che tutte le quattro ultime Equazioni eſpoſte al num. antecedente ſi poſſono anche coſtruire colla ſteſſa Iperbola riferita a' ſuoi Diametri. Si prenda la prima Equazione di tal numero (e già ciò, che ſi prova di una, ſi verifica anco delle altre) colli ſegni tutti poſitivi, cioè $\frac{gyy}{b} + xy = ab + mx + ny$; libe-

rando dalla frazione il quadrato yy, farà $yy + \frac{bxy}{g} = \frac{bbb + bmx + bny}{g}$, Equazione all' Iperbola riferita a' ſuoi Diametri (mm. 39.). Se il quadrato yy foſſe negativo, ſi renda poſitivo colla traſpoſizione de' termini.

IL FINE.

TA-

TAVOLA DE' CAPI
DELL' OPERA.

CAPO PRIMO.

Dell' Equazioni alla Parabola. Pag. 5

CAPO SECONDO.

Dell' Equazioni all' Ellissi. Pag. 27

CAPO TERZO.

Dell' Equazioni all' Iperbola, o Iperbole oppoſte. Pag. 48

CAPO QUARTO.

Dell' Equazioni all' Iperbola fra gli Aſſintoti. Pag. 72

40' 1462360

Digitized by Google

TAB. I

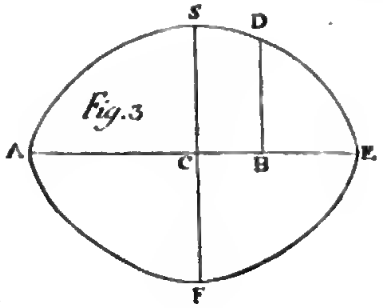
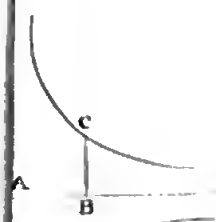


Fig. 3



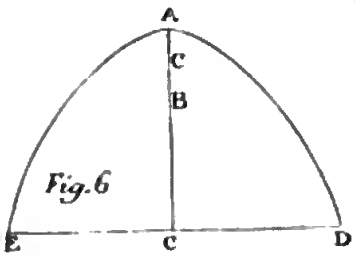


Fig. 6

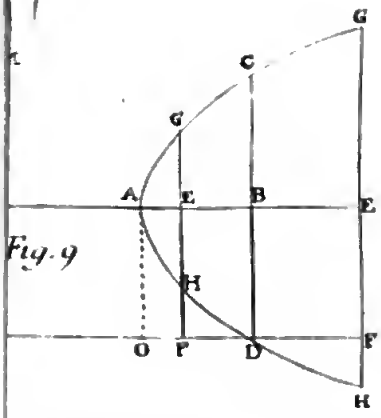


Fig. 9

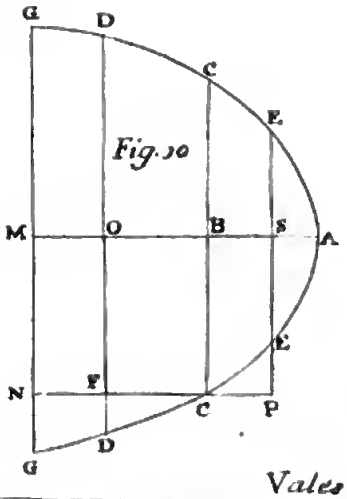


Fig. 10

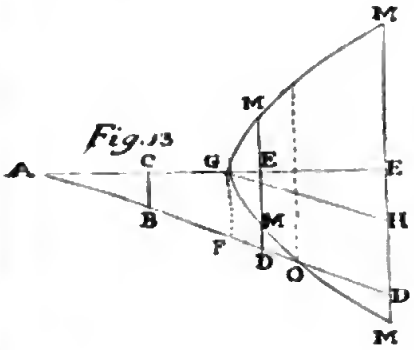
Valesi inc.

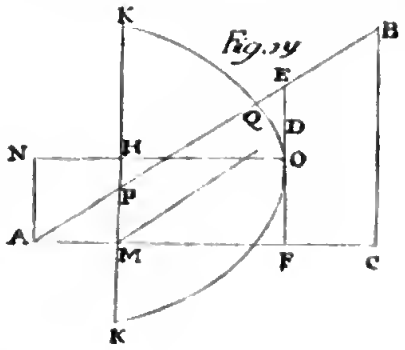
BIBLIOTECA NAZIONALE "VITTORIO EMANUELE III" NAPOLI

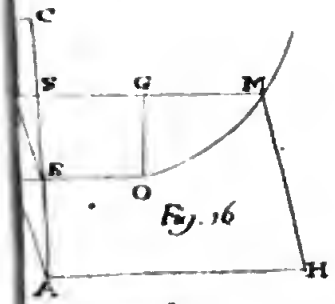
34.9.19.

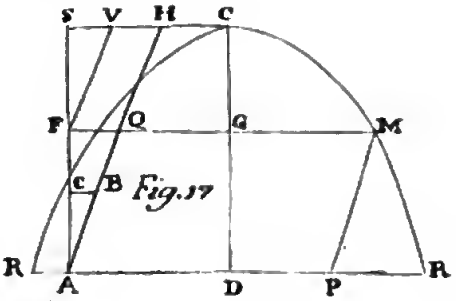
Digitized by Google

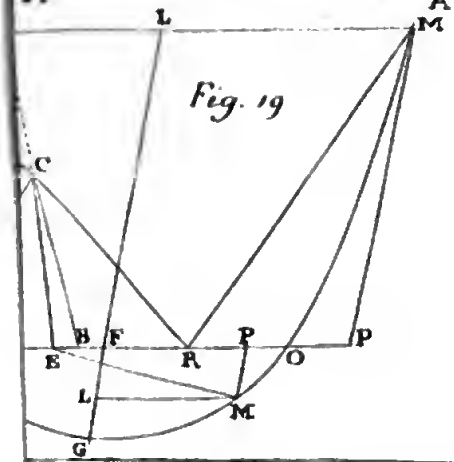
TAB. II

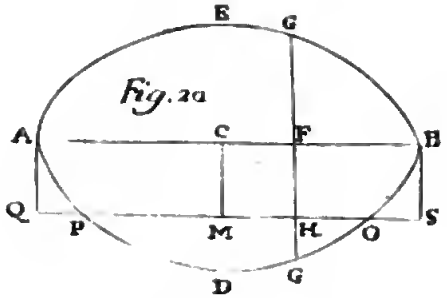












Valesi inc.

BIBLIOTECA NAZIONALE "VITTORIO EMANUELE III" - NAPOLI

TAB. III

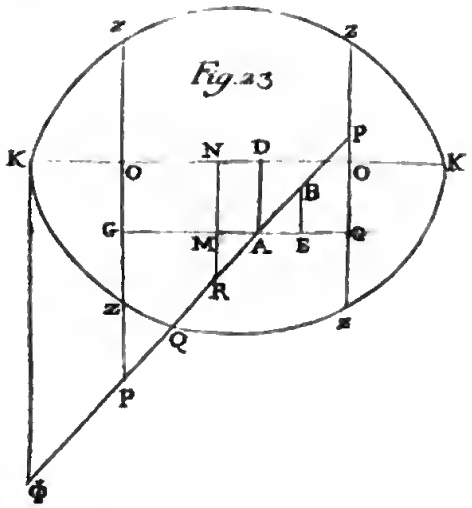


Fig. 23

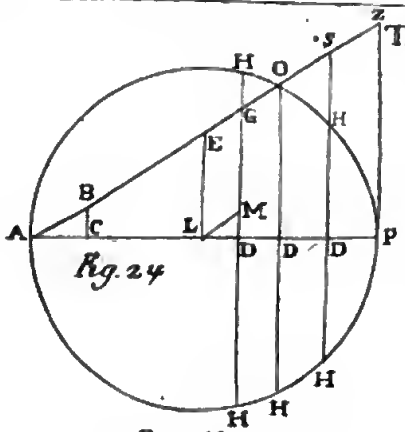


Fig. 24

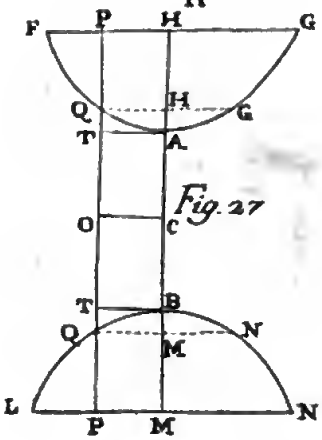
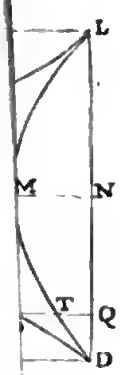


Fig. 27



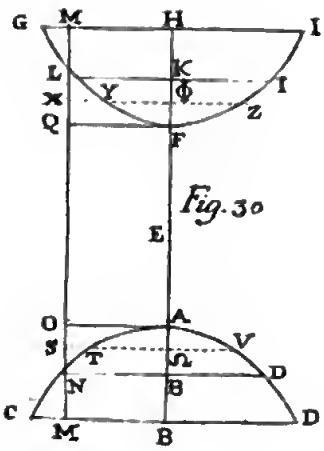


Fig. 30

BIBLIOTECA NAZIONALE "VITTORIO EMANUELE III" - NAPOLI

Valesi inc.

TAB. IV

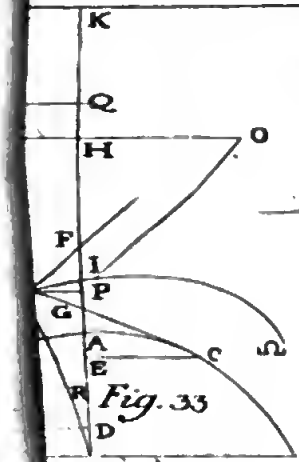


Fig. 33

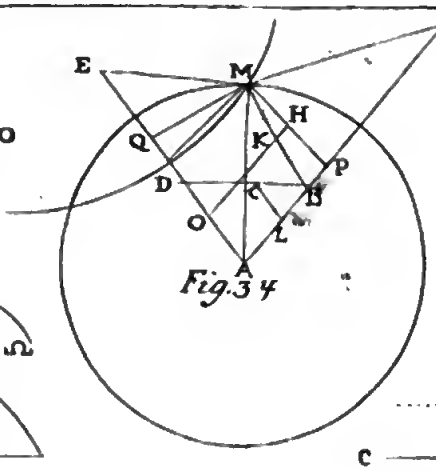


Fig. 34

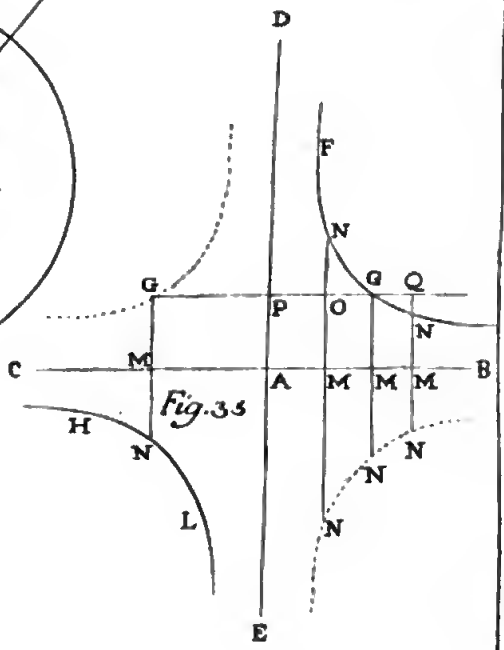


Fig. 35

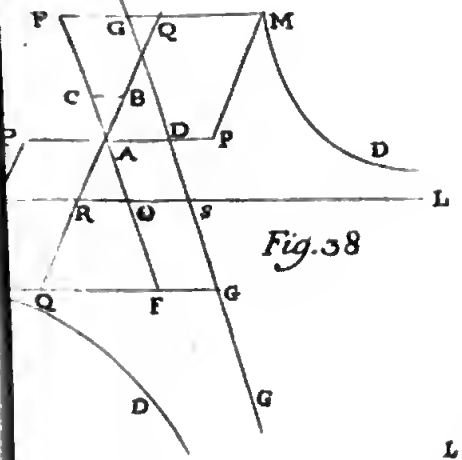


Fig. 38

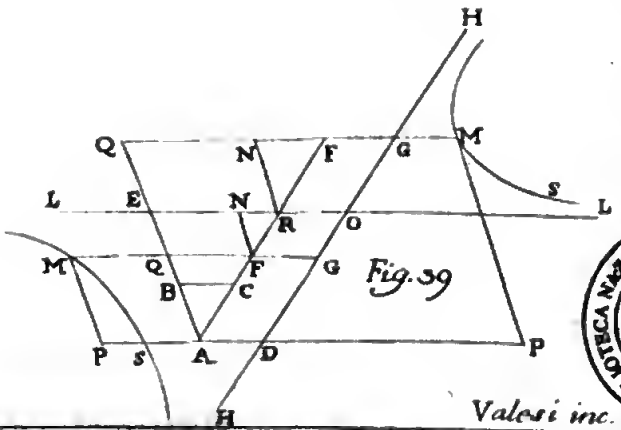


Fig. 39

Valesi inc.

BIBLIOTECA NAZIONALE "VITTORIO EMANUELE III" NAPOLI